O STOWARZYSZENIACH KREDYTU LUDOWEGO
WE FRANCJI.

Najdoskonalszym bez zaprzeczenia typem organizacji kredytu ludowego są niemieckie stowarzyszenia zaliczkowe, których wzorowe zasady teoretyczne i świetne rezultaty praktyczne nie są obce czytelnikom Ekonomisty ([1]). Żadna jednak instytucja nie może być społeczeństwu narzucona a priori, ale musi wypływać z jego ducha, charakteru, obyczajów, stopnia oświaty, warunków politycznych i socialnych, tradycij historycznych i t. p. Stąd téż nie można się ograniczyć na badaniu organizacji kredytu ludowego wyłącznie w Niemczech, jakkolwiek ona tam jest najdoskonalszą, i żądać od innych krajów bezwzględnego naśladownictwa; ale zastanawiać się należy nad usiłowaniami w téj dziedzinie, na innym gruncie, w obec innych okoliczności dokonanemi. Z porównania różnych dróg do jednego prowadzących celu, poznamy która jest najpewniejsza; z porównania różnych form jednéj instytucji, poznamy co w niéj jest niezmiennego, a co ulegać może przeobrażeniu, stosownie do miejscowych okoliczności.

Stowarzyszenia francuskie mają dla nas szczególnie tę specialną ważność, że kodex handlowy francuski jest w kraju naszym prawem obowiązującém, a stąd i formy prawne, w które Francuzi stowarzyszenia swe oblekli, mogą u nas z łatwością znaleść zastosowanie.

We Francji ludowe stowarzyszenia kredytowe podzielić można na 3 kategorje:

1. *Societés du Crédit au travail* w Paryżu i innych większych miastach, nadto *Caisse d'escompte des associations populaires*, *Caisse impériale des associations coopératives*, i niektóre inne, opierające się na tych samych zasadach.

2. *Associations de crédit.* Są to właściwie kasy oszczędności, wypożyczające swym członkom w przypadku bezrobocia lub innego nieszczęścia potrzebne im pieniądze.

([1]) Ekonomista, grudzień 1865. - Merkury rok 1866 Nr. 49.

3. *Banques du peuple* albo *associations de crédit mutuel*, zbliżone do niemieckich stowarzyszeń zaliczkowych.

Francuzi są jeszcze dalecy od posiadania tak dokładnych wiadomości statystycznych o swoich stowarzyszeniach ludowych, jak Anglicy i Niemcy. Dokładniejsze dane, ale jeszcze nie kompletne, posiadamy tylko o stowarzyszeniach wzajemnego kredytu w Paryżu. Dnia 1 stycznia 1866 r. liczba ich wynosiła 64, liczba członków 2.902; posiadały one kapitał 268.622 fran., wypożyczyły w ciągu roku 1865-go 755.346 fr. Sprawazdawca przypuszcza, że nieznane mu banki ludowe w Paryżu dochodzą zapewne do téj saméj liczby co znane, ogół więc wynosi 120 do 130 ([1]). Nadmienić w tém miejscu wypada, że w wielu małych miastach niemieckich znajdują się stowarzyszenia zaliczkowe, z których każde posiada kapitał i robi obroty roczne przewyższające kapitał i obroty wszystkich wyliczonych 64 banków paryskich razem wziętych.

Dwie ostatnie kategorje stowarzyszeń nie przedstawiają wielkiego interesu, zwłaszcza dla obeznanych ze stowarzyszeniami Schulze'go z Delitzsch; natomiast *Crédit au travail*, *Caisse d'escompte des associations populaires*, i *Caisse impériale des associations populaires* są to instytucje *sui generis*, posiadające wiele charakterystycznych znamion, i dlatego na bliższe rospatrzenie zasługują.

Dnia 1 października 1863 r. *Societé du Crédit au travail* rospoczęło w Paryżu swe czynności pod dyrekcją p. Beluze. Liczba członków wynosiła 172, kapitał podpisany 12.120 franków; złożono natychmiast czwartą część. Tym którzy starali się usprawiedliwić swoją bezczynność na polu stowarzyszeń ludowych przeszkodami prawodawczemi, Beluze odpowiada w następujący sposób: „Prawda, że stowarzyszenia polityczne są we Francji zabronione;. . ale nic nam nie przeszkadza jednoczyć się dla hurtownego zakupu i częściowéj samym sobie odprzedaży wszelkich artykułów żywności, wszelkich przedmiotów potrzebnych do utrzymania naszych rodzin. Nic nam również nie przeszkadza towarzyszyć się dla hurtownego nabywania surowych materjałów, sprzedawania naszych wyrobów i osiągania w ten sposób wszelkich korzyści, które dostają się obecnie pośrednikom.... Możemy również łączyć się dla dania dzieciom naszym wychowania, jakie za dobre uznajemy, dla zapewnienia sobie wzajemnie kredytu, którego potrzebujemy."

([1]) L'Association Nr. 34 d. 20 maja 1866 r.

Zgodnie z temi słowami, Beluze, przy pomocy pewnéj liczby ekonomistów i prawników, założył stowarzyszenie kredytowe, któremu nadał taką formę, jaka jest możliwa pod panowaniem francuskiego kodexu handlowego, a mianowicie formę *spółki komandytowéj* zwyczajnéj, bez akcij, pod firmą Beluze et Comp. ([1]).

Wszelka spółka komandytowa składa się: 1) z jednego lub więcéj spólników firmowych, solidarnie odpowiedzialnych względem osób trzecich za zobowiązania spółki z całego swego majątku i 2) z większéj liczby spólników komandytowych, odpowiedzialnych jedynie w granicach swoich wkładów. Ażeby spółka taka legalnie istnieć mogła, potrzeba ogłoszenia, — w sposób art. 42, 43, 44 i 46 K. H. przepisany, — imion spólników firmowych i wysokości majątku spółkowego, nietylko przy powstaniu spółki, ale przy każdéj zmianie zaszłéj w osobach lub majątku. Warunek ten ogłaszania jest bardzo uciążliwy dla stowarzyszeń ludowych; bo w naturze tych stowarzyszeń, przeznaczonych dla szerszego koła, leży częste przybywanie i ubywanie członków,—publikowanie więc wszelkich zmian naraża na znaczne koszta. Trzeba jednak warunkowi temu poddać się, aż póki nie zajdzie w tym punkcie reforma prawodawcza pożądana tak u nas jak i we Francji.

Zachodzi pytanie, czy w spółce komandytowéj udziały członków mogą być różnéj wysokości. Kwestja ta jest wielkiéj wagi w stowarzyszeniu ludowém, w którém trzeba przyjmować od niezamożnych uczestników drobne wkładki i dopiero z biegiem czasu je powiększać. Otóż, co do spółki bezimiennéj, art. 34 K. H. orzeka:

> Kapitał spółki bezimiennéj dzieli się na akcje, a nawet na kupony akcij *równéj wartości.*

Przy spółkach komandytowych zastrzeżenia takiego niema; można więc z argumentu *a contrario* wyprowadzić wniosek, że w spółkach komandytowych akcje mogą być różnéj wartości. Teorję tę popierają i inne przepisy prawne. Kodex cywilny jest prawem ogólném, kodex handlowy prawem specialném; we wszelkich kwestjach, których kodex handlowy wyraźnemi przepisami nie reguluje, trzeba się odwołać do kodexu cywilnego i w nim szukać wyjaśnienia. Otóż w przedmiocie obecnie nas obchodzącym, kodex cywilny następujące daje przepisy:

> Jeżeli akt spółki nie oznacza udziału każdego spólnika w stratach lub korzyściach, udział każdego jest *stosunkowy do jego wkładu* do kapitału spółkowego.
>
> Co się zaś tyczy spólnika, który wniósł do spółki tylko swój przemysł, udział jego w korzyściach lub stratach ustanawia się tak, jakby wkład jego wyrównywał wkładowi spólnika *najmniéj wnoszącego* (art. 1853 K. C. f.)

([1]) Statuta stowarzyszenia Crédit au travail art. 1—3.

Spólnicy odpowiadają względem wierzyciela z którym weszli w umowę, każdy w równéj części, *chociażby udział jednego z nich był mniejszy*, jeżeli aktem zobowiązanie jego nie zostało wyraźnie ograniczone w stosunku tego ostatniego udziału (art. 1865).

Przytoczone artykuły jasno przemawiają za tém, że udziały członków w stowarzyszeniu mogą być różnéj wysokości; a skoro w art. 34 K. H. jest mowa tylko o spółkach bezimiennych, wyjątek ten nie może być rosciągnięty do innych spółek, ale owszem *exceptio confirmat regulam*.

Skutkiem téj swobody w wysokości udziałów, spólnicy komandytowi mogą wedle potrzeby powiększyć lub zmniejszyć swe wkłady; jedni członkowie mogą się usuwać, inni wstępować; w ogóle dość jest wolności, byleby tylko, jakeśmy wspomnieli, przybycie nowych spólników firmowych i nowe komandyty, również jak wszelki ubytek, były należycie ogłaszane. Ta wolność, jakkolwiek znacznie jeszcze krępowana ogłoszeniami o wstępowaniu i wyłączaniu się członków, niemniéj powiększaniu kapitałów, jest konieczna w stowarzyszeniu ludowém, w którém masy udział przyjmują i gdzie kapitał tworzy się powoli na drodze drobnych oszczędności.

Już tu na samym wstępie, w formie prawnéj widać ważną różnicę pomiędzy *Crédit au travail* i niemieckiemi stowarzyszeniami zaliczkowemi. W pierwszéj instytucji, jako spółce komandytowéj, odpowiedzialni są członkowie tylko do wysokości swych wkładów, a spólnik firmowy odpowiada z całego swego majątku; w drugich zaś, zbliżonych do spółek zwanych w Kod. Hand. fran. spółkami pod imieniem zbiorowém (en nom collectif), wszyscy członkowie są solidarnie odpowiedzialni za zobowiązania stowarzyszenia. Już z pierwszéj téj różnicy wypływają ważne konsekwencje. Tam gdzie wszystkich ciąży jednakowa odpowiedzialność, czyli gdzie wszyscy mają jednakowe obowiązki, tam téż wszystkim służą jednakowe prawa. Gdzie zaś stowarzyszenie dzieli się na członków firmowych i komandytowych, tam pierwsi muszą mieć większe od drugich prawa. To téż w stowarzyszeniu *Crédit au travail* spólnik firmowy otrzymuje płacę corocznie przez zgromadzenie ogólne ustanawianą ([1]); nadto 25% czystego dochodu idzie corocznie na rzecz tegoż spólnika i innych członków zarządu w stosunku ich płacy, z tém zastrzeżeniem, że przypadająca na nich część rocznego dochodu, nie może przewyższyć rocznéj ich płacy ([2]). Inni członkowie mają natomiast następujące uczestnictwo w korzyściach spółki: póki udział nie podniósł się do 20 franków, nie otrzymuje procentu ani diwidendy; udział przewyższający 20 fr.

([1]) Statuta art. 31.
([2]) Ibid. art. 62.

otrzymuje procent 5% bez diwidendy; udział 100-frankowy i wyższy otrzymuje diwidendę i procent [1]. Diwidenda rozdzieloną zostaje pomiędzy członkami z 50% czystego dochodu. Resztujące 25% idą na fundusz rezerwowy [2].

Ale co ważniejsza, gdzie odpowiedzialność z całego majątku ciąży jednego lub kilku członków firmowych, tam ciż członkowie muszą być ludźmi bogatymi, muszą się wznieść po nad poziom téj warstwy społecznéj, dla któréj przeznaczony jest *kredyt ludowy*. Nikt więc z ludu, ale mężowie po-nad ludem się znajdujący muszą stanąć na czele stowarzyszenia. Tu więc pogwałconą zostaje owa ważna zasada *samopomocy*, którą stowarzyszenia niemieckie i angielskie wywiesiły na swoim sztandarze; lud zostaje nadal biernym, na pasku prowadzonym, a stąd téż osiągniętemi być nie mogą te korzyści moralne i materjalne, jakie osiągają stowarzyszenia, które całe masy do czynnego powołują udziału.

Niedogodności te stowarzyszenia *Crédit au travail*, które odbierają mu w zupełności charakter demokratyczny, łagodzone są przynajmniéj w części przez następujące przepisy: Najwyższa władza spoczywa w rękach zebrania ogólnego, które oprócz posiedzeń nadzwyczajnych schodzi się dwa razy do roku dla wysłuchania sprawozdania i naradzania się nad interesami stowarzyszenia [3]. Na ogólném zebraniu uczestniczy każdy członek, którego wkład wynosi 100 fr.; nikt nie ma więcéj jak jeden głos, choćby udział jego w stowarzyszeniu był jak największy [4] Nadto członkowie są co miesiąc zawiadamiani o stanie interesów przez ogłaszane sprawozdania [5]. W atrybucjach zebrania ogólnego leży daléj: mianowanie i odwoływanie członków firmowych i innych urzędników stowarzyszenia [6]. Nakoniec od członków zależy przyjmowanie nowych uczestników: zarząd bez ich zezwolenia nikogo do stowarzyszenia przyjmować nie może. Do tego punktu statuta wielkie przywiązują znaczenie, bo w pierwszym zaraz artykule orzekają: „Artykuł 1861 K. C. stosuje się do stowarzyszonych:” artykuł ten brzmi:

„Każdy spólnik może, bez zezwolenia innych spólników, przypuścić do udziału, jaki ma w spółce, trzecią osobę; nie może zaś, bez takowego zezwolenia, przypuścić ją do spółki, chociażby nawet zarządzał spółką.”

Powodem tego zastrzeżenia jest obawa, ażeby cel stowarzyszenia nie został skrzywiony przez nowych, nieznanych akcjonarjuszów, którzyby nie ro-

(1) Statuta art. 18.
(2) Ibid. art. 62.
(3) „ „ 42.
(4) „ „ 45.
(5) „ „ 27.
(6) „ „ 55 — 57.

zumieli ani charakteru, ani znaczenia stowarzyszenia, a dążyli jedynie do zyskania wysokich diwidend.

Dyrektor zarządzający ma sobie przydaną Radę nadzorczą, złożoną z 3 do 15 członków, wybranych na zebraniu ogólném, których zadaniem jest oświecać dyrektora w interesach stowarzyszenia, nie krępując wszakże w niczém jego wolnéj działalności (1). Przy wyborze Rady nadzorczéj zwraca się uwagę na to, ażeby do jéj składu wchodzili przedstawiciele rozmaitych profesij, a to dlatego, ażeby administracja jednoczyła w sobie zbiór specialnych wiadomości. Rada nadzorcza składa się więc zwykle z publicystów, prawników, kupców, fabrykantów i t. p.

Organizację uzupełniają: komisja kontroli, komisja badająca wypłacalność żądających kredytu, i rada prawna, których znaczenie z nazw wyczytać można (2).

We Francji podnoszą się poważne głosy przeciwko przyjętéj przez niemieckie stowarzyszenia zaliczkowe zasadzie nieograniczonéj solidarności; odradzają francuskim stowarzyszeniom przyjęcia téj zasady, nawet wówczas gdyby prawo żadnych nie stawiało przeszkód, i oddają pierwszeństwo przyjętéj przez stowarzyszenie Beluze et C. formie spółek komandytowych.

J. Simon (3) uważa, że w stowarzyszeniach niemieckich, jakkolwiek każdy odpowiada z całego majątku za wszystkich, to jednak odpowiedzialność nie jest jednakowa, bo w razie niewypłacalności stowarzyszenia, od biednego nie będzie można nic wyexekwować, a cały ciężar spadnie na barki bogatego. Ryzyko nie jest jednakowe, niesłusznem więc jest, ażeby korzyści w równym stopniu były pomiędzy wszystkimi członkami rozdzielone.

Drugi zarzut, jaki Simon czyni niemieckim stowarzyszeniom zaliczkowym, jest ten, że za pomocą nieograniczonéj solidarnéj odpowiedzialności powiększając kredyt, zmniejszają jednocześnie liczbę członków najpożądańszych, bo bogaci na takich warunkach udziału przyjmować nie chcą.

Nakoniec uważa Simon niesprawiedliwość w tém, że w razie niewypłacalności stowarzyszenia, kiedy wierzycielom trzeba oddać majątek spółkowy, ci z członków, których udziały są najwyższe, największe też ponoszą straty. W stowarzyszeniu zaś komandytowém członkowie mają rekurs do tych, którzy jeszcze nie wnieśli całego udziału.

Zarzuty te według nas są w części tylko usprawiedliwione, bo pomiędzy członkami, przyjmującymi udział w stowarzyszeniach ludowych, nie ma zna-

(1) Statuta art. 32—35.
(2) Ibid. art. 36—40.
(3) Le travail. Paris 1866.—3-ed. str. 295—9.

cznéj różnicy majątkowéj, stąd téż i różnica w odpowiedzialności nie jest wielka. Nadto stowarzyszenia niemieckie, opierając się na zasadzie samopomocy, nie rekrutują swych członków pomiędzy bogaczami, ale pomiędzy średniemi i niższemi klasami roboczemi; okoliczność więc że nieograniczona odpowiedzialność odstrasza bogaczów od przyjmowania udziału, nie ma dla nich żadnego znaczenia.

Jak organizacją, tak i celem *Crédit au travail* różni się od niemieckich banków zaliczkowych. Celem tych ostatnich jest pożyczanie uczestnikom swym, za odpowiednią rękojmją, kapitałów, potrzebnych im do prowadzenia przemysłu. Natomiast *Crédit au travail* w następujący sposób cel swój określa: „Udzielać kredytu stowarzyszeniom już istniejącym, pomagać tworzeniu się nowych stowarzyszeń wytwórczych (produkcijnych), spożywczych (konsumcijnych) i kredytowych; pomagać rozwojowi zasad solidarności i wzajemności,—ażeby uczynić kredyt dostępnym dla pracowników we wszystkich gałęziach działalności ludzkiéj: rolnictwie, przemyśle, handlu, nauczaniu, naukach i sztukach (¹)."

Rozległy ten cel ma być dopięty za pomocą następujących operacij:

1. Udzielania kredytu wszelkiego rodzaju stowarzyszeniom jużto udzielając im funduszów z tytułu uczestnictwa, jużto nabywając od nich wexle handlowe, przez nie wystawione lub indosowane, jużto otwierając im kredyt za odpowiednią rękojmją.

2. Dostarczania swym uczestnikom kredytu, wyrównywającego przynajmniéj wysokości ich udziałów, i mogącego przewyższyć tę cyfrę, za solidarném poręczeniem kilku członków lub osób trzecich.

3. Udzielania kredytu osobom trzecim (nie członkom) zobowiązującym się solidarnie do zwrotu zaciągniętéj pożyczki.

Nadto stowarzyszenie zajmuje się wszelkiemi czynnościami bankowemi, z wyłączeniem operacij giełdowych (²).

Na szczególniejszą uwagę zasługują tu rachunki bieżące, skup i kredyta udzielane stowarzyszeniom:

Jako bank ludowy, *Crédit au travail* przyjmuje na rachunki bieżące, poczynając od jednego franka. Jeżeli sumy wkładane na bieżące rachunki mają być zwrócone w stałych terminach, to deponent otrzymuje 4%, jeżeli termina wypłaty nie są stałe, ale na żądanie, to procent wynosi tylko 3½%. O żądaniu wypłaty sumy przechodzącéj 1000 fr., trzeba oznajmić na 2 dni, a sumy przechodzącéj 4000 fr. na 10 dni naprzód.

(¹) Statuta art. 6.
(²) „ „ 7.

Crédit au travail skupuje wexle wystawione lub indosowane przez stowarzyszenia ludowe, lub przez grupy robotników solidarnie odpowiedzialnych (1).

Ażeby stowarzyszenie jakie mogło korzystać z kredytu przez *Crédit au travail* udzielonego, musi spełnić następujące warunki:

1. Posiadać jednego lub więcéj zarządców lub administratorów, rachunkowość regularną, fundusz rezerwowy, powiększany przez cząstkę czystego dochodu, kapitał dostarczony lub dostarczyć się mający przez każdego członka w pieniądzach, towarach lub pracy.

2. Przyjąć za zasadę ogłaszanie wszelkich swych czynności na wzór banku francuskiego.

3. Zobowiązać się do składania co miesiąc stowarzyszeniu *Crédit au travail* sprawozdania ze swego położenia (2).

Warunki te są korzystne tak dla banku centralnego, jak dla stowarzyszeń, które się im poddają; pierwszy zabespiecza się w ten sposób od strat, drugie przyjmują zasady zbawienne dla wewnętrznego ich rozwoju i zjednania ufności z zewnątrz.

Oprócz przytoczonych warunków, *Crédit au travail* normuje wysokość udzielanego kredytu według następujących prawideł: kredyt otwarty stowarzyszeniom ustanowia się według liczby członków i szans ich przedsięwzięć. Kredyt powinien zawsze być pokryty wexlami, albo zabespieczony hipotecznie na nieruchomościach, albo uprzywilejowany na materjałach, towarach i wierzytelnościach stowarzyszenia (3).

Z tego co się wyżéj powiedziało, widać, że *Crédit au travail* założył sobie nierównie szerszy zakres działania aniżeli niemieckie stowarzyszenia zaliczkowe: pożycza nietylko własnym członkom, ale i obcym i całym stowarzyszeniom. *Crédit au travail* nie chce być skromném stowarzyszeniem, ku wyłącznemu użytkowi *swoich* członków; ale raczéj środkiem agitacji ruchu spółkowego,—chce powołać do życia stowarzyszenia ludowe, być dla nich moralną i materjalną dźwigną. Myśl ta wyraźnie się przebija w słowach założyciela: „Ażeby stowarzyszenia ludowe mogły należycie się uorganizować, ażeby zapełnić im brak kapitału i doświadczenia, potrzeba

(1) Statuta art. 10.
(2) Ibid. art. 13.
(3) „ „ 9.

spólnego ogniska, któreby mogło pomagać robotnikom pieniędzmi i doświadczeniem."

W całym tym rozległym programie, przebija się charakter francuskiego społeczeństwa. Wychowani od wieków pod systemem centralizacijnym, krępującym indiwidualną inicjatywę, Francuzi nie umieją tworzyć instytucij, drobnych wprawdzie, ale mających we własném łonie warunki bytu, żyjących własném a nie pożyczaném życiem. Przedewszystkiém tworzą oni wielkie centra, którym powierzają rolę rospromieniania życia po wszystkich kierunkach i zakątkach. Cały ruch odbywa się tam z góry na dół; instytucje nie wypływają z potrzeb i poczucia mas, ale wyskakują jak *deus ex machina* ze szczytów społeczeństwa.

Niemcy mają takie instytucje, jaką chce być *Crédit au travail*, a mianowicie zasilające radą i kapitałem inne stowarzyszenia; ale inną doszli do nich drogą. We Francji instytucja taka jest początkiem, fundamentem ruchu spółdzielczego; w Niemczech—końcem, koroną. W Niemczech roku 1850 założone zostało w Delitzsch skromne stowarzyszenie, i dopiero po 10 latach, kiedy liczba tych stowarzyszeń doszła już prawie do 300, utworzone zostało *biuro centralne* (Anwaltschaft), którego zadaniem jest:

1. Popieranie stowarzyszeń na sejmach, w prasie, na kongresach ekonomicznych, i w ogóle w życiu publicznem.

2. Wspieranie stowarzyszeń, tak istniejących, jak powstać mających, radą i czynem.

3. Pośredniczenie pomiędzy pojedynczemi stowarzyszeniami dla wymiany owoców doświadczenia i zawiązywania pomiędzy niemi stosunków handlowych, dla dopięcia wreszcie połączonemi siłami celów, których w odosobnieniu osiągnąć nie można.

4. Otworzenie źródeł kredytu jużto u bankierów, już u samych stowarzyszeń, przenosząc zbywające kapitały z jednego stowarzyszenia do drugiego, braku doznającego ([1]).

Oprócz téj instytucji centralnéj, któréj przeznaczeniem jest głównie moralna pomoc, utworzyła się w r. 1865, kiedy liczba stowarzyszeń doszła już do 1.300, druga, któréj zadaniem jest pomoc materjalna, a mianowicie udzielanie kredytu. Instytucją tą jest *Niemiecki bank stowarzyszeń* (Deutsche Genossenschaftsbank), którego akcjonarjuszami są po większéj części same stowarzyszenia ludowe i ich członkowie ([2]).

([1]) Schulze-Delitzsch. Vorschuss und Creditvereine. Lipsk 1862 str. 161 i n.
([2]) Id. Jahresbericht für 1865. Lipsk 1866 str. 4.

Dwie te instytucje są połączone w *Crédit au travail;* ale różnica, powtarzamy, zachodzi w tém, że niemieckie centralne instytucje są *wynikiem*, wyższym stopniem rozwoju drobnych stowarzyszeń; francuski zaś *Crédit au travail* jest *zawiązkiem*, pierwszym krokiem na drodze stowarzyszeń ludowych.

Jest jednak pewien wzgląd, który może usprawiedliwić tak wczesne powstanie centralnego biura stowarzyszeń ludowych we Francji. Trzeba przyznać Francuzom, że myśl stowarzyszeń ludowych u nich wzięła początek. Na dnie wszystkich utopij socialistycznych leży myśl łączenia drobnych sił w jedną potęgę. Myśl była dobra, ale wykonanie złe. Rozważniejsi Anglicy i Niemcy pochwycili myśl, oczyścili ją z wszelkich niedorzecznych i niepraktycznych narośli, powoli i cierpliwie ją rozwijali i doprowadzili do tego stopnia, na którym ją dziś widzimy. We Francji wszelako idea stowarzyszeń nie przeminęła bez śladu. Rewolucja lutowa z r. 1848 dała socialistom sposobność wprowadzenia w życie ich niektórych doktryn i przekonania się o ich niepraktyczności. Zaczęto więc rzecz rozważniéj traktować. Ale i wtedy jeszcze brakowało Francuzom cierpliwości do powolnéj i systematycznéj organizacji stowarzyszeń ludowych; chcieli jednym skokiem dopiąć tego, do czego dopiero po wielu latach prób i doświadczeń dojść można. Rzucili się mianowicie do stowarzyszeń wytwórczych,—z największemi połączonych trudnościami i których byt warunkuje się istnieniem innych podrzędniejszych stowarzyszeń. W innéni miejscu staraliśmy się wykazać, że loiczny pochód ruchu spółdzielczego jest następujący: naprzód *stowarzyszenia spożywcze*, ułatwiające oszczędność, następnie stowarzyszenia *zaliczkowe*, ułatwiające kredyt, daléj stowarzyszenia *magazynowe*, ułatwiające nabywanie surowych materjałów i zbyt wytworów. „Kiedy wszystkie te stowarzyszenia dopięły swego celu, a mianowicie wytworzyły kapitały, ułatwiły kredyt, zbyt i nabywanie surowych materjałów, przekonały swych członków o płodności zasady towarzyskiéj, nauczyły ich żyć w zgodzie i posłuszeństwie dla obranéj przez siebie władzy naczelnéj, — słowem kiedy członkowie nabyli wszystkich przymiotów potrzebnych do uczestniczenia w wielkiéj spółce i kierowania nią, — wówczas należy jeszcze jeden tylko zrobić krok, ażeby stanąć na najwyższym szczeblu organizmu, przystąpić do zakładania *stowarzyszeń wytwórczych* (produkcijnych)” ([1]).

Francuzi po téj drodze nie postępowali, ale zaczęli od stowarzyszeń wytwórczych. I stąd też, chociaż niektóre z tych stowarzyszeń doszły do kwitnącego stanu, są to jednak wyjątki; ogólny zaś ruch stowarzyszeń ludowych, tak sztucznie we Francji przyśpieszony, ani w części nie wyrównywa

---

([1]) Ekonomista, październik 1866 str. 184.

rezultatom odniesionym w Anglji i Niemczech, gdzie się zbytecznie nie śpieszono, i dlatego dalej się zaszło.

Bylibyśmy jednak niesprawiedliwi, gdybyśmy winę za tę pośpieszność zwalili w zupełności na charakter narodu francuskiego: wiele do tego przyczyniło się prawodawstwo. Wiemy już jaką przeszkodę stanowią, dla stowarzyszeń ludowych, przepisy nakazujące ogłaszanie wszelkich zmian. Otóż najmniéj ruchliwe jest stowarzyszenie wytwórcze, w którém członkowie pracujący spólnie nie są tak liczni i ściślejszemi związani są ze sobą węzłami, jak w każdém innem stowarzyszeniu ludowém. Dla takiego stowarzyszenia uciążliwe formy ogłoszenia wszelkich zaszłych zmian nie mają wielkiego znaczenia, bo przyjmowanie nowych członków, ani występowanie dawnych, nie jest częste. Ten więc wzgląd, jak się zdaje, wielce się we Francji przyczynił do wyprzedzenia przez stowarzyszenia wytwórcze innych form stowarzyszeń ludowych.

Poznajmy się teraz z rezultatami odniesionemi przez *Crédit au travail* i stopniowym jego rozwojem:

D a t a	Liczba uczestnik.	Kapitał zapisany	Kapitał złożony
1 października 1863. .	172	20.120	około 5.000
31 grudnia „ . .	321	42.120	?
30 czerwca 1864	546	85.150	48.201
31 grudnia „	723	112.450	72.361
30 czerwca 1865	876	142.850	97.205
31 grudnia „	1055	171.750	119 213
30 czerwca 1866	1187	206.220	141.402 [1]

Postęp bardzo znaczny: w przeciągu trzech lat kapitał zapisany zwiększył się dziesięć razy, a kapitał złożony 28 razy. Stosunek więc kapitału złożonego do zapisanego, znacznie się polepszył. Dnia 30 czerwca 1864 r. kapitał złożony wynosił 56%, a d. 30 czerwca 1866 — 68%. Dzięki temu wzrostowi własnego kapitału, stowarzyszenie zyskało u publiczności zaufanie, a w dalszéj konsekwencji kredyt, którego używa dla dopięcia swoich celów. I tak 30 czerwca 1866 r. znajdowały się w kasie *Crédit au travail*, następujące obce fundusze: ([2]).

([1]) J. E. Horn. *Les sociétés de Crédit au travail en France* (Journal des économistes, październik 1866 r.)

([2]) *La Mutualité* (czasopismo N. 11 z 15 września 1866 r.)

w bieżących rachunkach wypłacalnych na żądanie . .	fr.	206.629,[87]
„ „ ze stałym terminem . . .	„	56.691,[88]
w depoz. stowarz. wzajemnego kredytu (crédit mutuel)	„	156.070 —
za bony kasowe	„	4.483,[55]
razem	„	423.875,[25]

Pożyczone kapitały wynoszą tedy sumę przeszło dwa razy tak wielką, jak własne zapisane.

Wspomnieliśmy o bonach kasowych, trzeba więc znaczenie ich wytłumaczyć. Na rzecz mających się udzielić stowarzyszeniom zaliczek, przeznaczono połowę kapitału złożonego; w saméj rzeczy d. 30 czerwca 1866 r. suma wypożyczonych stowarzyszeniom pieniędzy wynosiła przeszło 77.000 fr. ([1]) (kapitał złożony wynosił 141.402 fr.). Pożyczki udzielane bywają stowarzyszeniom na dłuższe termina, kapitał zostaje więc unieruchomiony, co może sprowadzić klęskę w chwili przesilenia finansowego. Dla usunięcia tego niebespieczeństwa, stowarzyszenie postanowiło od początku roku 1865 wydawać bony kasowe w sztukach 1000, 500, 200, 100 i 50 frankowych, ze stałym, długim terminem (od 6 miesięcy do 5 lat), przynoszące 5% jeżeli są wystawione na sześć miesięcy, 6%, jeżeli na rok lub dłużéj. Suma bonów kasowych znajdujących się w obiegu, nie ma nigdy przekroczyć $^4/_5$ części udzielonych stowarzyszeniom zaliczek, tak że $^1/_5$ liczy się na ryzyko. Bony takie znajdują we Francji chętnych nabywców.

Środki te nie są jeszcze dostateczne do zaspokojenia wzrastających ciągle żądań kredytu; dlatego znaczna część wexli nie zachowuje się w portfelu, ale zostaje odprzedaną czyli przekupioną (zreeskontowaną), przez co zakres działalności banku ludowego znacznie się rozszerza. *Crédit au travail* staje się w ten sposób pośrednikiem; przez przyłożenie swego indosu czyni papier, jak to Francuzi nazywają, *banquable* (skupialny przez bank francuski).

Obraz tych czynności jest następujący:

Data	Liczba skupionych papierów	Suma skupionych papierów	Przekup (reeskonta)	Zwroty
4-ty kwartał 1863	64	31.988	3.500	8.570
1 półrocze 1864 . .	389	170.407	43.790	74.500
2 „ „ . .	793	372 906	95.242	217.038
1 „ 1865 . .	1.337	477.567	202.051	215.597
2 „ „ . .	1.636	599.171	348.295	246.071
1 „ 1866 . .	3.049	1.088.632	548.274	392.946 ([2])

([1]) J. E. Horn loco cit.
([2]) Ibid.

W roku tedy 1863 przekupiono 28% portfelu
„ 1864 „ 32% „
„ 1865 „ 55% „
„ 1866 „ 58% „

Stopniowe zmniejszenie się stosunkowe portfelu dowodzi, że stowarzyszenie zyskuje coraz więcéj zaufania i kredytu, przez co i zakres jego działalności bezustannie się rozszerzał ([1]).

Zarzuty któreśmy czynili stowarzyszeniu Beluze et Comp. nie mają widać w praktyce, przynajmniéj we Francji, téj doniosłości, jaką im przypisujemy, traktując przedmiot ze stanowiska teoretycznego. W sprawozdaniu swojém za rok 1864, *Crédit au travail* w następujący sposób odpiera czynione sobie zarzuty: „Zarzucano nam, żeśmy zaczęli budować od dachu, tworząc bank ogólny stowarzyszeń, zanim stowarzyszenia istniały. Odpowiedź nasza będzie krótka: przekonajcie się powiadamy, czém był ruch spółdzielczy we Francji przed założeniem naszego stowarzyszenia, i obaczcie czém jest dzisiaj. Lyon, Mulhouse, Strasburg, Colmar i Lille wstąpiły w nasze ślady i spodziewamy się że za ich przykładem pójdą niebawem Nimes, Saint-Etienne i wszystkie wielkie miasta Francji. W ten sposób spodziewamy się, że wkrótce delegowani rozmaitych stowarzyszeń *Crédit au travail* połączą się dla uregulowania spólnych interesów i dla otwarcia stosunków międzynarodowych z bankami ludowemi innych krajów ([2]).

Oprócz przykładu, jaki paryski *Crédit au travail* dał miastom prowincjonalnym do utworzenia u siebie podobnych instytucij, ważne też oddał przysługi przez pomoc materjalną, jaką udzielił stowarzyszeniom giserów, kopistów, szmuklerzy, białoskórników, spożywczemu w Passy, dziennikowi *l'Association* i wielu innym w Paryżu i departamentach, które zapomogom *Crédit au travail* zawdzięczają już to swoje powstanie, już to rozwój ([3]).

Powodzenie stowarzyszenia *Crédit au travail* dowodzi, że zasady samopomocy i decentralizacji, jakkolwiek ważne w stowarzyszeniach kredytu lu-

---

([1]) Dla porównania przytaczamy kilka cyfr z bilansu niemieckiego banku stowarzyszeń za rok 1865, pierwszy istnienia: Kapitał zakładowy wynosił 270.000 talarów. Roczny obrót interesów (nie obrót kasowy, który wynosił 2 razy tyle) 10.244.569 tal. Stowarzyszenia otrzymały w ciągu roku pożyczki w sumie tal. 1.006.616. Jak znaczne niemiecki bank stowarzyszeń robi postępy widać z tego, że w drugim roku istnienia (1866) w pierwszych trzech miesiącach udzielił stowarzyszeniom pożyczek w sumie 514.432 tal. (*Blätter für Genossenschaftswesen*, czasopismo r. 1866 Nr. 16).

([2]) L'Association N. 20 d. 11 lutego 1866.

([3]) J. E. Horn loco cit.

dowego, nie mają jednak téj doniosłości, ażeby bez nich stowarzyszenia rzeczone istnieć nie mogły. Stąd też nie można zaniechać ruchu spółdzielczego w krajach, gdzie zasady samopomocy i decentralizacji dla rozmaitych powodów przyjąć się nie mogą. Owszem według nas można, a nawet trzeba poświęcić samopomoc wszędzie gdzie konieczność tego wymaga. Wszelka bowiem doktryna staje się szkodliwą, ilekroć chce być bezwzględnie przeprowadzoną i nie bierze w rachubę stojących na drodze przeszkód. Marzycielom zostawmy krainę ideału, ludzie zaś zdrowo myślący niechaj się zamykają w granicach rzeczywistości i wyzyskują wszystko to, co w danych okolicznościach jest możliwe.

Lud potrzebuje kredytu. Jeżeli możemy mu jedną ręką dać kredyt a drugą wskazać do niego drogę przez samopomoc, to pośpieszmy się z naszym datkiem; jeżeli zaś możemy lud udarować samym tylko kredytem, to nie cofajmy ręki dlatego, że go jednocześnie na drogę samopomocy wprowadzić nie możemy.

W żadnym jednak razie nie możemy pochwalić owego gorączkowego zapału p. Beluze, który już teraz myśli o jakichś stowarzyszeniach ludowych międzynarodowych. Zapał ten wcale nie do twarzy Francuzom, którzy w porównaniu z Anglikami i Niemcami, tak wiele jeszcze na tém polu mają do zdziałania we własnym kraju!

Jeżeli *Crédit au travail* gwałci zasadę samopomocy, to zarzut ten w wyższym jeszcze stopniu spada na instytucję zwaną *Caisse d'escompte des associations populaires*, która jest stowarzyszeniem kredytowém, przeznaczonéni wprawdzie dla ludu, ale przez lud ani założonéni, ani podtrzymanéni. Stowarzyszenie to założone zostało i jest zarządzane przez dwóch ekonomistów francuskich: Leona Walras i Leona Say (wnuka sławnego Jana Chrzciciela). Formą prawną tego stowarzyszenia jest nieznana u nas, a we Francji dopiero w r. 1863 zaprowadzona, spółka z odpowiedzialnością ograniczoną (Société à responsabilité limitée), w któréj każdy spólnik jest odpowiedzialny tylko do wysokości swego wkładu, a która może powstać bez zezwolenia rządowego. Cały kapitał zakładowy *Caisse d'escompte* wynoszący z początku 100.000 fr., a 31 marca 1866 r. podniesiony do 200.000 fr. zebrany został nie pomiędzy ludem, ale w sferach wyższych. Jestto bezwątpienia bardzo pocieszający objaw, świadczący o decentralizacji kapitałów. Pozwolimy sobie w tém miejscu powtórzyć trafne uwagi Redaktora Ekonomisty, wypowiedziane w Nr. 41 Merkurego (r. 1866): „Dotąd charakterystyką kapitałów jest ich masowanie się, skupianie w wielkich ogniskach,— działanieześrodkowane. Dwa były główne tego rodzaju ogniska: przedsię-

bierstwa dróg żelaznych i pożyczki publiczne. Otóż takie skierowanie zasobów społecznych do pewnych tylko objawów potęgi i pracy narodowéj, wyradza podwójną nienormalność: przesyt i gorączkę w tych właśnie podniecanych ogniskach życia, a niemoc i bezwładność w innych. W braku rozmyślnego początkowania ku naprawie téj anomalji, naprawa ta wypłynie z saméj natury rzeczy. Potrzeby dotychczasowe masowania kapitałów wyczerpią się i ustąpią innym, rozgałęzionym, różnorodnym, a te wytworzą dla kapitału kierunek odwrotny, odśrodkowy, — sprowadzą go do wszystkich warstw społecznych, do rozmaitych, a licznych ognisk życia społecznego. Są skazówki, że zwrot podobny już się zaczyna, a przynajmniéj staje się potrzebą czasu. Niezmiernie w ostatnich latach pomnożone kapitały francuskie, poawanturowawszy się w kolejach zagranicznych i w pożyczkach tureckich, mexykańskich, egipskich i t. p., dziś zaczynają się cofać, i jakby szukać właściwego pola. Stagnacja jest więc objawem nowego kierunku. Stowarzyszenia, kredyt ludowy, zasada samostarczenia — ważną w tym kierunku odegrają rolę."

Witamy z radością ten nowy i zbawienny kierunek lokacji kapitałów; ale z drugiéj strony, życzylibyśmy sobie, ażeby w tém nowém przeobrażeniu społecznem robotnik nie odgrywał biernéj roli. Nie chcemy, ażeby kredyt udzielany mu był jako łaska, bo to na dobre nie wyjdzie ani wierzycielowi, ani dłużnikowi, ani społeczeństwu całemu. Żadna jednostka, żadna warstwa społeczna, żaden naród nie podniesie się na wyższe stanowisko, jeżeli nieufny we własne siły, z założonemi rękoma oczekiwać będzie pomocy Opatrzności lub innych ludzi. Robotnik wtedy tylko może wzbudzić ufność do siebie, wtedy tylko zasługuje na kredyt, kiedy zebrał sobie sam mały kapitalik i przez to złożył dowody swéj pracowitości, skrzętności i oszczędności. Pojął to Schulze-Delitzsch i dlatego stowarzyszenia jego tak świetne wydają rezultaty. Możemy wprawdzie nieco odstąpić od programu Schulze'go, możemy pozwolić na to, ażeby inteligencja i kapitały przyszły w pomoc ludowi; ale nie możemy wpaść w drugą ostateczność, i jak to *Caisse d'escompte* uczyniła, odsunąć w zupełności lud od udziału w pracy nad własném podźwignieniem.

Musimy się jednak pośpieszyć z uwagą, że założycielom téj instytucji nie obcém jest znaczenie zasady samopomocy; owszem Walras w dziełku swojém „*Les associations populaires* (Paris 1865)" stawia stowarzyszenia zaliczkowe niemieckie jako ideał, do którego wszelka organizacja kredytu ludowego dążyć winna,—instytucja zaś przez niego założona, jest tylko ustępstwem dla wymagań prawa francuskiego.

Caisse d'escompte wyznaczyła sobie następujący zakres działania:

1. Dawać zaliczenia stowarzyszeniom kredytowym, wytwórczym i spożywczym, urządzonym na podstawie wzajemnego poręczenia, albo solidarnéj odpowiedzialności, i skupować papiery przez nie wystawione lub indosowane.

2. Wchodzić z temi spółkami i grupami we wszelkie układy, mające na celu ułatwienie ich urządzenia i rozwoju, oraz podwyższenie wartości ich papierów i rękojmij przez nie ofiarowanych.

3. Wspierać zakładanie tych stowarzyszeń i grup, już to udzielając im zaliczeń, koniecznych przy ich ustanowieniu, już to przyjmując wkłady, przeznaczone do utworzenia spólnego kapitału.

4. Przyjmować w depozyt i na rachunek bieżący wszelkie sumy, i robić w interesie swych kljentów wszelkie operacje bankowe ([1]).

Caisse d'escompte nie jest tedy uosobieniem zasady stowarzyszeń, ale tylko instytucją pomocniczą, któréj zadaniem jest wspierać ruch spółdzielczy. Cel który sobie założyła ad 3 jest niewykonalny, bo żadna instytucja kredytowa nie może do tego stopnia unieruchamiać i ryzykować swego kapitału przez dawanie zaliczeń stowarzyszeniom dopiero powstać mającym. Sam zarząd stowarzyszenia zwrócił zaraz na pierwszém ogólném zebraniu uwagę akcjonarjuszów na ten słaby punkt statutów ([2]).

Głównym celem tego stowarzyszenia pozostaje skup wexli, wystawionych przez stowarzyszenia ludowe i przykładanie do nich swego indosu dla uczynienia ich pokupnemi.

Gdy wystawiony przez stowarzyszenie ludowe wexel nie jest wypłacalny, *Caisse d'escompte* nie ma rekursu do stowarzyszenia, jako ciała zbiorowego, ale do każdego członka osobiście, a to na mocy osobnego układu, dobrowolnie z nimi przy zawiązaniu stosunków zawartego.

Wspomnieliśmy wyżéj, żeśmy gotowi złożyć niekiedy na ołtarzu konieczności ofiarę z zasady samopomocy; poświęcenie to jednak musimy uważać jako *malum necessarium* i zamykać je w granicach nieodzownéj konieczności. Możemy tam gdzie inaczéj być nie może, poddać stowarzyszenia ludowe pod przepisy rządowe, postawić na czele osoby zamożne dla zyskania większego zaufania i kredytu, urządzić instytucje pośredniczące pomiędzy stowarzyszeniami, a bankami i kapitalistami,—ale nie wolno się uciekać do jałmużny, czy to osób prywatnych czy to rządu. Rok 1848 powinien być dostateczną nauką jak szkodliwém jest przecenianie zasobów i pomocy państwowéj; a jednak 5 kwietnia 1866 r. założoną została w Paryżu *Caisse*

(1) Statuta *Caisse d'escompte* art. 4.
(2) J. E. Horn loco cit.

impériale des associations coopératives z kapitałem zakładowym **1.000000** fr., których połowa pochodzi ze szkatuły Cesarza Napoleona. Trzeba jednak przyznać, że w opinji inteligencji francuskiéj, radykalna zaszła zmiana co do zapatrywania się na interwencją rządową. Otóż jak w tym przedmiocie wyraża się *Association*, organ stowarzyrzeń ludowych: „Obawialiśmy się zawsze nie tego, żeby ruch spółdzielczy był zbyt krytykowany, zbyt zaprzeczany, ale żeby nie był zbyt popierany, zbyt protegowany. Życzylibyśmy sobie bardzo, ażeby rząd pojął dostatecznie tę obawę i wstrzymał się z założeniem *Caisse des sociétés coopératives*. Ta interwencja nie może wytrzymać żadnéj krytyki. Istotą spółdzielczości jest inicjatywa i samorząd grup robotników; wszystko co dąży do zmniejszenia ich inicjatywy i samorządu jest przeciwne ruchowi spółdzielczemu" ([1]).

Józef Kirszrot.

([1]) L'Association Nr. 43, d. 22 lipca 1866 r.

O ZABESPIECZENIACH NA ŻYCIE.

(Dok. p. 1866, II. 237, 302).

III.

Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do życia ludzkiego.

Zadanie I-sze. Oznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba m letnia przeżyje jeszcze lat n.

Z tablicy śmiertelności widzimy że z Am osób m-letnich dosięga wieku $m+n$ tego osób $Am+n$, czyli że na Am przypadków możliwych mamy $Am+n$ przypadków przychylnych; szukane więc prawdopodobieństwo wyrazi się wzorem (część I wzór 1)

$$w = \frac{Am+n}{Am} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba 30-letnią przeżyje jeszcze lat 15?

$$w = \frac{A_{45}}{A_{30}} = \frac{339}{439} = 0{,}9863$$

Zadanie II-gie. Z N osób m letnich, ile pozostanie przy życiu po upływie lat n?

Z tablicy śmiertelności widzimy, że z Am osób m letnich, pozostanie przy życiu po upływie lat n, osób $Am+n$, znajdziemy więc szukaną liczbę osób z proporcji:

$$Am : Am+n = N : x$$

$$x = N.\frac{Am+n}{Am} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Przykład. Z 10,000 osób 30-letnich ile dosięga wieku lat 60?

$$x = \frac{A_{60}}{A_{30}} \times 10{,}000 = \frac{210}{439} \times 10{,}000 = 0{,}4782 \times 10{,}000 = 4782$$ (czyli 47,82 %).

Zadanie III-cie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba m letnia nie przeżyje lat n?

Prawdopodobieństwo to (według zasady 1. I) jest dopełnieniem do jedności prawdopodobieństwa przeżycia lat n, wyrazi się więc wzorem

$$w^1=1-w=1-\frac{Am+n}{Am}=\frac{Am-Am+n}{Am} \quad \ldots\ldots (3)$$

Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba 1^0 letnia nie przeżyje lat 4?

$$w^1=1-\frac{A_5}{A_1}=\frac{A_1-A_5}{A_1}=\frac{750-579}{750}=\frac{171}{750}=0{,}228.$$

Zadanie IV-te. Oznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba m letnia przeżyje jeszcze lat $n-1$ i umrze w roku n^{tym}?

Mamy tu przed sobą wypadek zależący od dwóch innych: prawdopodobieństwo nastąpienia tego wypadku zależy 1^0 od prawdopodobieństwa że osoba m letnia przeżyje jeszcze lat $n-1$, 2^0 od prawdopodobieństwa że umrze w n^{tym}. Oznaczywszy prawdopodobieństwo pierwszego wypadku przez w_1, prawdopodobieństwo drugiego wypadku przez w_2, prawdopodobieństwo szukanego wypadku przez W, otrzymamy:

$$W = w_1 w_2 \quad (I\ 3)$$

ale
$$w_1=\frac{Am+n-1}{Am} \quad (III\ 1)$$

$$w_2=1-\frac{Am+n}{Am+n-1} \quad (III\ 3)$$

$$W=\frac{Am+n-1}{Am}\times\frac{Am+n-1-Am+n}{Am+n-1}=\frac{Am+n-1-Am+n}{Am}\ \ldots (4)$$

Przykład. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba 30-letnia umrze w 45-m roku życia.

$$W=\frac{A_{44}-A_{45}}{A_{30}}=\frac{B_{44}}{A_{30}}=\frac{7}{439}=0{,}0159$$

Zadanie V-te. Oznaczyć prawdopodobieństwo, że osoby A, B, C . . . w wieku lat m, n, p. . . . przeżyją jeszcze razem lat r.

Pawdopodobieństwo szukane jest iloczynem prawdopodobieństw prostych

że osoba A przeżyje lat r, co wyraża się przez $w_A=\frac{Am+r}{Am}$

„ B „ „ „ $w_B=\frac{An+r}{An}$

„ C „ „ „ $w_C=\frac{Ap+r}{Ap}$

. . . .

. . . .

czyli wyraża się wzorem

$$W = w_A \,.\, w_B \,.\, w_C \ldots$$

czyli

$$W = \frac{Am+r.\ An+r.\ Ap+r.}{Am.\ An.\ Ap.} \ \ldots\ldots \quad (5)$$

Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoby 30-letnie, 40-letnie, i 50-letnie, przeżyją razem jeszcze lat 10?

$$w_A = \frac{A_{40}}{A_{30}},\ w_B = \frac{A_{50}}{A_{40}},\ w_C = \frac{A_{60}}{A_{50}}$$

$$W = w_A \,.\, w_B \,.\, w_C \,. = \frac{A_{40} \,.\, A_{50} \,.\, A_{60}}{A_{30} \,.\, A_{40} \,.\, A_{50}} = \frac{A_{60}}{A_{30}} = \frac{210}{439} = 0{,}479$$

Zadanie VI-te. Wyznaczyć prawdopodobieństwo W_1, że osoby wspomnione w poprzedniém zadaniu nie przeżyją razem lat r?

Według zasady 2. II.

$$W_1 = 1 - W = 1 - \frac{Am+r.\ An+r.\ Ap+r.\ \ldots}{Am.An.Ap.\ \ldots} \ \ldots \quad (6)$$

Przykład—biorąc cyfry poprzedniego

$$W_1 = 1 - \frac{A_{40} \,.\, A_{50} \,.\, A_{60}}{A_{30} \,.\, A_{40} \,,\, A_{50}} = 1 - \frac{A_{60}}{A_{30}} = 1 - \frac{210}{439} = \frac{229}{439} = 0{,}521.$$

O procencie składanym.

Zanim przejdziemy do właściwego przedmiotu — ubespieczenia, musimy jeszcze kilka słów powiedzieć o procencie składanym, na nim bowiem zasadzają się wszelkie rachunki o zabespieczeniach.

Jeżeli należnego procentu od kapitału nie odbieramy we właściwym terminie, ale go dołączamy do kapitału, tak że za każdym takim terminem nowy kapitał się tworzy, od którego procent jest rachowany, powiadamy że pożyczka jest o procencie składanym.

Oznaczając przez K kapitał, przez p stopę procentową, po upływie roku kapitał ten będzie:

$$K_1 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Kr$$

gdzie $r = 1 + \frac{p}{100}$

Po upływie dwóch lat, będzie

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = Kr^2$$

i t. d., tak że po upływie lat n

$$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = Kr^n \quad . . . \quad \text{(a)}$$

Dla ułatwienia rachunków ułożono tablice dające r^n przy różnych p dla liczby lat od 1 do 95 włącznie.

Podajemy tu taką tablicę ułożoną dla stóp procentowych 4%, 5%, 6% (tab. I).

Przykłady:

1-szy. Jaka będzie wartość 1000 rubli po upływie lat 50? licząc procent od procentu na stopę 5%?

$$K_{50} = 1000\ (1{,}05)^{50} = 11467 \text{ rubli } 40 \text{ kop.}$$

Gdyby odwrotnie trzeba było znaleść wartość teraźniejszą sumy wypłacalnéj po upływie lat n, takową otrzymamy z wzoru (a).

$$K = \frac{Kn}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} = \frac{Kn}{r^n} = Kn.\frac{1}{r^n} \quad . . . . . \quad \text{(b)}$$

Dla ułatwienia rachunku taż sama tablica I, podaje $\frac{1}{r^n}$.

Przykład 2-gi. Jaka jest wartość teraźniejsza sumy 1000 rubli płatnych po 30 latach, licząc procent od procentu podług stopy 6%?

$$K = 1000 \times \frac{1}{(1{,}06)^{30}} = 231 \text{ rubli } 38 \text{ kop.}$$

O zabespieczeniach na życie.

Nieszczęścia spowodowane śmiercią jednéj osoby, będącéj źródłem utrzymania całéj rodziny, są tak liczne, że oddawna już starano się im zaradzić. Dopóki jednak nie znano praw śmiertelności, wszelkie takie usiłowania były bezskuteczne, i dopiero po odkryciu prawa stałości stosunku umierających do żyjących, można było pomyśleć o urządzeniu instytucij mających na celu ubespieczenie kapitałów i dochodów, których odbiór lub pobieranie zależy od życia lub śmierci osób ubespieczonych. Kapitał rękojmiowy towarzystwa tworzy się albo za pomocą akcij, albo téż ze składek samych ubespieczonych. Pierwsza taka instytucja została utworzoną w Anglji w roku 1706

pod nazwą *Amicable Society;* za podstawę wszelkich rachunków służyły obliczenia sławnego męża stanu i jeometry holenderskiego Jana de Witt. Po niéj liczba towarzystw podobnych coraz bardziéj się powiększała, tak że obecnie liczymy w Anglji 200 podobnych instytucij, a w samym Londynie jest ich przeszło 80. Najsławniejsze z nich są:

Amicable założone w r. 1706, *Union* w r. 1714, *London Assurance Corporation* w r. 1721, *Royal Exchange* w r. 1722, *Equitable* w r. 1762, *Westminster Society* w r. 1792, *Palladium* w r. 1796; *Pelican* w r. 1797, *Globe* w r. 1803, *Albion* w r 1805, *London Life Association* w r. 1806, *Provident* w r. 1806, *Engle* w r. 1807, *Hope* w r. 1807 *Rock* w r. 1807, *West of England* w r. 1807, *Atlas* w r. 1808, *Norwich Union* w r. 1808, *North British* w r. 1809, *Sun* w r. 1810, *Scottish Windows' Fund* w r. 1815, *European* w r. 1819, *British Commercial* w r. 1820, *Guardian* w r. 1821, *Economic* w r. 1823, *Edinbourgh* w r. 1823, *Imperial* w r. 1823, *Azylum* w r. 1824, *Alliance* w r. 1824, *Crown* w r. 1824, *Scottish Union* w r. 1824, *Royal Naval, Military, and East India Society* w r. 1824, *Clerical, Medical etc.* w r. 1825, *University* w r. 1825, *Promoter* w r. 1826, *Clergy Mutual Assurance Society* w r. 1829, *National* w r. 1830, *Argus* w r. 1833, *Protector* w r. 1833, *Mutal* w r. 1833, *United Kingdom* w r. 1834; *Universal* w r. 1834, *York and North of England* w r. 1834, *Family Endowment* w r. 1835, *Metropolitan* w r. 1835, *Provident Institution* w r. 1835, *Hand in Hand* w r. 1836, *Legal and General* w 1836, *Licensed Victuallers* w r. 1836, *Minerva* w r. 1836, *North of Scotland* w r. 1836, *Britannia* w r. 1837, *National Mercantile* w r. 1837, *National Loan Fund* w r. 1837, *Victoria* w r. 1838, *Alfred* w 1839, *British empire* w r. 1839, *English and Scottish Law* w r. 1839, *Freemassons* w r. 1839, *London and Westminster* w r. 1839, *Protestant Dissenters* w r. 1839, *Westminster and General* w r. 1839, *Australasian* w r. 1840, *Church of England* w r. 1840, *City of Glasgow* w r. 1840, *Farmers* w r. 1840, *London, Edinbourgh and Dublin* w r. 1840, *Achilles* w r. 1841, *Caledonian* w r. 1841, *Medical and Invalid* w r. 1841 *Provident Clarks' Mutual Benefit Association* w r. 1841, *Reliance* w r. 1841.

Towarzystwa francuskie utworzone w XVIII-m wieku, nie miały żadnego powodzenia i upadały jedno po drugiém, a to z powodu braku potrzebnych wiadomości statystycznych. Dopiero w r. 1809 rząd francuski wydał rosporządzenie, mocą którego żadne towarzystwo nie może być założoném bez szczególnego pozwolenia rządu, i zarazem postanowił żeby taryfy opłat były obliczane według tablic śmiertelności Deparcieux i Duvillard'a, zaś stopa procentowa była równą stopie papierów publicznych. Obecnie stopa procentowa = 4%, a używaną tablicą śmiertelności jest tablica Duvillard'a. Począwszy od tego czasu, powstały liczne towarzystwa ubespieczeń; podamy tu główne z nich:

1. *Compagnie d'assurances générales sur la vie* utworzone w r. 1819, z kapitałem 28 miljonów franków.
2. *L'Union*, założone w r. 1829, z kapitałem 20 milj. fr.
3. *La Nationale*, w r. 1830 z kapitałem 5 m. fr.
4. *Le Phenix*, w r. 1844, z kapitałem $4^1/_2$ m. fr.
5. *La Caisse Paternelle*, w r. 1850, z kapitałem 7 m. fr.

6. *L'Impériale* w r. 1854, z kapitałem 7.600.000 fr.
7. *La Caisse des familles* w r. 1858, z kapitałem 3 m. fr.
8. *La caisse de retraite pour la vieillesse.*

W Niemczech pierwsza podobna instytucja, na zasadach wzajemnego ubespieczenia, powstała w r. 1829 w Gotha.

Obecnie w Austrji istnieją następujące towarzystwa:

1. *Assicurazioni generali Austro-Italiche* w Trjeście, z kapitałem 2 000.000 złr.
2. *Allgemeine Wechselseitige Kapitalien und Rentenversicherungsanstalt* w Wiedniu założone w r. 1840, przez profesora Józefa Salomona.
3. *Azienda Assicuratrice* z kapitałem 2.000.000 złr.
4. *Nuova Società Commerciale di Assicurazioni* w Trjeście, założone w r. 1847, z kapitałem 2.000.000 złr.
5. *Riunione Adriatica di Sicurità,* założone w r. 1853, z kapitałem 6.500.000 złr.
6. *Anker* w Wiedniu założone w r. 1859 z kapitałem 2.000 000 złr.

Wszystkie towarzystwa ubespieczeń na życie dzielą się na dwa główne działy:

A. Towarzystwa ubespieczające pensje.

B. „ „ kapitały jednorazowe.

A. Ubespieczenie pensij.

1. *Pensje dożywotne pojedyncze.* Przez to rozumiemy pensje pobierane zaraz po zawarciu umowy — (pensje dożywotnie bezpośrednie), lub też po upływie oznaczonéj naprzód liczby lat (odroczone) aż do śmierci osoby ubespieczonéj.

2. *Pensje czasowe* (Temporäre Renten), —płatne od pewnego terminu przez pewną tylko liczbę lat, naprzód oznaczoną, np. wypłacanie pensji pewnéj osobie aż do dojścia jéj do pełnoletności.

3. *Pensje wzajemne* lub *pensje na najdłuższe życie,*—jeżeli dwie lub więcéj osób np. mąż i żona zabespieczają się pod tym warunkiem, że pobierać będą pensje dożywotnie aż do śmierci ostatniéj z nich.

4. *Pensje dożywotnie dla małżeństw,*— jeżeli dwie osoby np. mąż i żona ubespieczają się pod warunkiem, że pobierać będą pensję dożywotnią aż do śmierci jednéj z nich.

5. *Pensje pośmiertne pojedyncze.* Są to pensje wypłacalne ze śmiercią osoby ubespieczonéj aż do końca życia osoby, dla któréj kapitał został ubespieczony, lub też przez pewien przeciąg czasu, naprzód oznaczony.

6. *Pensje pośmiertne wzajemne,* zabespieczone na życie dwóch lub więcéj osób, wypłacalne ze śmiercią jednéj osoby i trwające przez pewien czas lub do smierci ostatniéj z nich. Podobne zabespieczenia mają miejsce np.

w małżeństwach lub spółkach, gdzie ze śmiercią jednéj osoby, majątek spólny zostaje rozdzielony, a pozostały majątek nie wystarcza na utrzymanie lub do dalszego prowadzenia interesów.

B. Ubespieczenie kapitałów.

1. *Kapitał jednorazowy.* Przez to rozumiemy kapitał, który towarzystwo wypłaca ubespieczonemu, jeżeli takowy przeżyje pewien przeciąg czasu naprzód oznaczony. Podobne umowy służą np. dla zabespieczenia posagu dla córki i t. p.

2. *Kapitał pośmiertny*,— gdy warunki ubespieczenia są takie, że po śmierci ubespieczonego, towarzystwo wypłaca oznaczony kapitał jego spadkobiercom.

3. *Kapitał na przeżycie*,—gdy z dwóch lub więcéj osób, jedna zostająca przy życiu, otrzymuje ubespieczony kapitał.

4. *Kapitał pośmiertny cząstkowy*,—gdy osoba pobierać go mająca, utraca do niego swoje prawa, jeżeli śmierć osoby ubespieczonéj nie nastąpi w pewnym oznaczonym przeciągu czasu. Podobne umowy mają np. miejsce, gdy mąż ubespiecza dla żony kapitał wypłacalny wtedy, gdy śmierć jego nastąpi przed uzyskaniem emerytury.

Uwaga I. Bardzo często towarzystwo wypełnia swoje zobowiązania, dopiero po upływie oznaczonéj liczby lat (zwanych latami próby), a to w celu bliższego poznania stanu zdrowia ubespieczonego.

Uwaga II. W największéj liczbie towarzystw, tylko osoby zupełnie zdrowe mogą być ubespieczone; istnieją jednak towarzystwa, w których ubespieczają się osoby chore albo nie zupełnie zdrowe. Takie ubespieczenia przyjmują się w towarzystwie *Medical, Invalid and General Life Assurance-Company* w Londynie. Towarzystwo to nie wydaje taryfy opłat, albowiem opłaty zmieniają się stosownie do stopnia rozwoju choroby.

Uwaga III. Od kilku lat istnieje w Londynie towarzystwo ubespieczające od wszelkiego rodzaju przypadków, mogących się przytrafić podróżnym na kolejach żelaznych (*Railway Passenger Assurance Company*). Towarzystwo to przyjmuje ubespieczenia na czas dłuższy lub też na pojedyncze podróże. W pierwszym przypadku roczna opłata od ubespieczenia na sumę 1000 funtów sterlingów wynosi 20 szilingów; w drugim zaś przypadku podróżny dopłaca do biletu 1-éj klasy 3 pensy, drugiéj klasy 2 pensy, trzeciéj klasy 1 penny.

Towarzystwa na przeżycie czyli Towarzystwa tontin.

Towarzystwa te zostały po raz pierwszy wprowadzone w życie przez Lorenz'a Tonti w roku 1653. W nich składki członków pobierane bywają aż do pewnego terminu, nazwanego *terminem likwidacji* (Liquidation Termin). Po upływie zaś tego terminu, zyski wynikające z procentów składanych i z wymierania niektórych członków, zostają rozdzielone proporcjonalnie do składek i wieku członków pozostałych przy życiu, lub też służą do wypłacania pensji powiększających się z każdym rokiem.

Podobne towarzystwa przedstawiają środki prędkiego powiększenia majątku.

Główne rodzaje ubespieczeń na życie, które nasza Dyrekcja Ubespieczeń przyjmuje, są następujące:

1. *Kapitał na dożycie*, którego wypłata ma nastąpić po upływie pewnéj liczby lat.

2. *Dochód dożywotni*, to jest pensja roczna od wieku oznaczonego aż do śmierci.

3. *Kapitał pośmiertny*, który ma być wypłacony sukcesorom lub też stosownie do rosporządzenia ubespieczonego.

4. *Kapitał na przeżycie*, który ma być wypłacany osobie wskazanéj, skoro ta przeżyje ubespieczoną.

5. *Dochód na przeżycie*, to jest dochód dożywotni dla osoby wskazanéj od daty śmierci osoby ubespieczonéj.

Rachunki odnoszące się do ubespieczeń na życie.

Rachunki wzajemnych praw i zobowiązań kasy ubespieczeń z jednéj, a ubespieczonego z drugiéj strony, powinny być wykonane według następującéj ogólnéj zasady.

Składki z procentem składanym powinny być równe sumie potrzebnéj dla zadośćuczynienia zobowiązaniom towarzystwa względem ubespieczonego i do pokrycia kosztów administracji; czyli innemi słowy, *wartość obecna tego wszystkiego co towarzystwo odbiera od osoby ubespieczonéj powinna być równą wartości dzisiejszéj sumy, którą towarzystwo ma wypłacić w przyszłości.*

We wszystkich naszych rachunkach opuścimy koszta administracji, takowe bowiem pobierane bywają przez podwyższenie składki ubespieczonego o pewien procent ([1]).

Widzieliśmy poprzednio że wszystkie rodzaje ubespieczeń dają się sprowadzić do dwóch głównych działów, mianowicie do

1. *Ubespieczenia pensij.*
2. „ *kapitałów.*

Stosownie do tego dzielimy nasze rachunki.

DZIAŁ PIERWSZY.

Ubespieczenie pensij.

1. Pensje dożywotnie pojedyncze.

a) *Pensja dożywotnia dla osoby B, ubespieczona przez osobę A.*

Osoba A płaci jednorazowo sumę α, i oprócz tego obowiązuje się płacić przez lat a (przez czas życia osoby B), przy końcu każdego roku, składkę roczną β, w celu zapewnienia osobie B, po upływie lat b, pensję roczną γ przez lat c.

Oznaczmy wiek osoby A przez p, osoby B przez q. Opłata osoby A składa się z wniosku jednorazowego α i ze składek β opłacanych przez lat a, których wartość teraźniejsza wynosi $\frac{\beta}{r}, \frac{\beta}{r_2}, \frac{\beta}{r_3} \dots \frac{\beta}{r^a}$ [gdzie $r = \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ a s = stopie procentowéj]. Wartość tych składek zależy jeszcze od prawdopodobieństwa że osoby A i B razem żyją.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prawdopodobieństwo że osoba } A \text{ przeżyje lat } n = \dfrac{Ap+n}{Ap} \\ \text{„} \qquad \text{„} \quad B \quad \text{„} \qquad = \dfrac{Aq+n}{Aq}\end{array}\right\} \text{(III. 1)}$$

Prawdopodobieństwo zatém że obie przeżyją jeszcze lat n, wynosi

$$\frac{Ap+n.\ Aq+n}{Ap.\ Aq}. \quad \text{(I. 2)}$$

Nadzieja zatém matematyczna składki $\frac{\beta}{r^n}$ wynosi

$$h_n = \frac{\beta}{r_n} \cdot \frac{Ap+n.\ Aq+n}{Ap.\ Aq} \quad \text{(I. 3)}$$

([1]) Tak np. w *Allgemeine Wechselseitige Kapitalien und Rentenversicherungs-Anstalt* w Wiedniu, na koszta administracji liczy się 1%.

Ponieważ zaś składki β wnoszone bywają przez lat a, to dla otrzymania nadziei matematycznéj składek 1-éj, 2-éj, 3-éj .... a^{tej} należy kolejno w ostatnim wzorze zmieniać n od $n=1$ do $n=a$, i otrzymamy że wartość teraźniejsza opłat osoby A będzie

$$l = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \ldots + h_a + \alpha = \alpha + \sum_{n=1}^{n=a} h_n$$

gdzie znak Σ (suma) oznacza sumę $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_a$

Jeżeli w tym wzorze za h_n podstawimy jego wartość poprzednio znalezioną, otrzymamy:

$$l = \alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap + n.\ Aq + n}{r^n.\ Ap.\ Aq} \right] \ldots . \quad (\lambda)$$

Nadzieja matematyczna wypłat towarzystwa otrzymuje się w sposób następujący:

Wartość teraźniejsza pensji płatnéj za n lat, wynosi $\frac{\gamma}{r^n}$; a ponieważ prawdopodobieństwo że osoba B przeżyje jeszcze lat n wynosi $\frac{Aq+n}{Aq}$, to nadzieja matematyczna wypłaty nastąpić mającéj po n latach będzie:

$$Hn = \frac{Aq+n}{Aq} \frac{\gamma}{r^n}$$

Ponieważ zaś zaobowiązania towarzystwa rozpoczynają się dopiero po upływie lat b i trwają przez lat a, to wartość teraźniejsza wypłat towarzystwa wyraża się wzorem:

$$L = H_{b+1} + H_{b+2} + H_{b+3} + \ldots + H_{b+c} = \sum_{n=b+1}^{n=b+c} H_n$$

a podstawiając za Hn wartość, otrzymamy

$$L = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=b+c} \left[\frac{Aq+n}{r^n\ Aq} \right] \ldots . . \quad (\mu)$$

Jeżeliby pensja miała być wypłacaną nie przez lat c, ale przez cały ciąg życia osoby B, wzór (μ) przejdzie na następujący:

$$L = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{Aq+n}{r^n\ Aq} \right] \ldots . . \quad (\mu')$$

gdzie θ = kres życia.

Według więc zasady podanéj na początku tego ustępu, powinno być

$$L = l$$

czyli ze względu na równania (λ) i (μ)

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap+n \, . \, Aq+n}{r^n . \, Ap . \, Aq}\right] = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=b+c} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (I)$$

ze względu zaś na równania (λ), (H')

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap+n . \, Aq+n}{r^n \, Ap \, Aq}\right] = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (I^a)$$

Za pomocą równań I i I^a mając dane dwie z trzech ilości α, β, γ możemy obliczyć trzecią.

b) *Pensja dożywotnia ubespieczona przez osobę B.*

Ponieważ w tym przypadku wypłata składek zawsze nastąpi, jeżeli tylko osoba ubespieczona pozostanie przy życiu, należy więc przyjąć że osoba A z pewnością żyć będzie, czyli że w tym przypadku prawdopodobieństwa życia osoby A... $\frac{Ap+n}{Ap} = 1$. Wzory więc I i I^a przybierają kształt:

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=b+c} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] \quad . \; . \; . \; , \quad (II)$$

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{Aq+n}{r^n \, Aq}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (II^a)$$

2. **Pensje wzajemne,** (na najdłuższe życie). Osoby A i B (lub jedna z nich w przypadku śmierci drugiéj) opłacają składkę roczną przez lat a, w celu zapewnienia sobie pensji rocznéj trwającéj aż do końca życia ostatniéj z nich.

Prawdopodobieństwo że osoba A umrze po n latach jest $1-\frac{A_{p+n}}{A_p}$

„ „ B „ „ $1-\frac{A_{q+n}}{A_q}$

„ że obie osoby A i B umrą $=\left(1-\frac{A_{p+n}}{A_p}\right)\left(1-\frac{A_{q+n}}{A_q}\right)$

$$=1-\frac{A_{p+n}}{A_p}-\frac{A_{q+n}}{A_q}+\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}$$

Prawdopodobieństwo zatém, że obie osoby nie umrą po n latach, wynosi

$$1-\left(1-\frac{A_{p+n}}{A_p}-\frac{A_{q+n}}{A_q}+\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right)=$$

$$=\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}$$

Nadzieja matematyczna zatém składki β opłacić się mającéj po n latach, wynosi

$$h_n=\frac{\beta}{r^n}\left[\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right]$$

Wartość zatém teraźniejszą wszystkich składek otrzymamy:

$$l=\alpha+\sum_{n=1}^{n=a} h_n=\beta\sum_{n=1}^{n=a}\frac{1}{r^n}\left[\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right]+\alpha$$

Wartość teraźniejsza pensji wypłacalnéj po n latach, otrzymuje się mnożąc $\frac{\gamma}{r^n}$ przez prawdopodobieństwo, że przynajmniéj jedna osoba pozostanie przy życiu.

$$H_n=\frac{\gamma}{r^n}\left[\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right]$$

a że powinnno być

$$l=L$$

to

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\frac{1}{r^n}\left[\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right]=$$

$$=\gamma\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\frac{1}{r^n}\left[\frac{A_{p+n}}{A_p}+\frac{A_{q+n}}{A_q}-\frac{A_{p+n}}{A_p}\frac{A_{q+n}}{A_q}\right]\ldots\text{(III)}$$

3. **Pensja dożywotnia dla małżeństw.** Ponieważ tak wypłata składek, jako też wypłata pensji ustaje ze śmiercią jednéj z osób A i B, to należy we wzorze III zamiast prawdopodobieństwa że jedna z osób żyje, podstawić prawdopodobieństwo że obie żyją, a które to prawdopodobieństwo wyraża się wzorem $\frac{Ap+n}{Ap}\frac{Aq+n}{Aq}$ i otrzymamy:

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\frac{1}{r^n}\left[\frac{Ap+n.\ Aq+n}{Ap\quad Aq}\right]=\gamma\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\frac{1}{r^n}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{Ap\quad Aq}\right]\ldots\ \text{(IV)}$$

4. **Pensja pośmiertna pojedyncza.**

Prawdopodobieństwo że osoba A umrze po n latach jest $1-\frac{Ap+n}{Ap}$ (III.3)

Nadzieja matematyczna składki $\frac{\beta}{r^n}$ jest

$$h_n=\beta\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}$$

Nadzieja matematyczna sumy wszystkich składek trwać mających przez lat a.

$$l=\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n.\ Ap\ Aq}\right]$$

Nadzieja matematyczna pensji, płatnéj po n latach jest

$$Hn=\gamma\left(\frac{Aq+n}{Aq}-\frac{Aq+n\ Ap+n}{Aq\ Ap}\right)\frac{1}{r^n}$$

bo $\left(\frac{Aq+n}{Aq}-\frac{Aq+n\ Ap+n}{Aq\ Ap}\right)=\frac{Aq+n}{Aq}\left(1-\frac{Ap+n}{Ap}\right)$ wyraża prawdopodobieństwo że osoba A umrze po n latach, a osoba B pozostanie przy życiu.

Nadzieja zatém matematyczna sumy wszystkich pensij będzie:

$$L=\gamma\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\left[\frac{Aq+n}{Aq}-\frac{Aq+n\ Ap+n}{Aq\ Ap}\right]\frac{1}{r^n}$$

gdzie b oznacza lata próby.

Ponieważ powinno być

$$L = l$$

więc

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap+n \; Aq+n}{r^n \; Ap \; Aq} \right] = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{Aq+n}{Aq} - \frac{Aq+n}{Aq} \, \frac{Ap+n}{Ap} \right] \frac{1}{r^n}. \quad \text{(V)}$$

5. **Pensje pośmiertne wzajemne.** Ponieważ osoby ubespieczone uie chcą pobierać pensji podczas życia wszystkich osób ubespieczonych, to od wypłat towarzystwa

$$\gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{Ap+n}{Ap} + \frac{Aq+n}{Aq} - \frac{Ap+n}{Ap} \, \frac{Aq+n}{Aq} \right] \frac{1}{r^n}$$

odnoszących się do przypadku, kiedy przynajmniéj jedna osoba żyje, należy odjąć sumę pensji, którą towarzystwo wypłaca w przypadku pensji dożywotniéj dla małżeństw, a która to suma równa się

$$\gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{1}{r^n} \left(\frac{Ap+n}{Ap} \, \frac{Aq+n}{Aq} \right) \right]$$

Nadzieja zatém matematyczna wypłat towarzystwa wyraża się wzorem

$$L = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{1}{r^n} \left(\frac{Ap+n}{Ap} + \frac{Aq+n}{Aq} - \frac{Ap+n}{Ap} \, \frac{Aq+n}{Aq} \right) \right] -$$

$$- \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{1}{r^n} \left(\frac{Ap+n}{Ap} \, \frac{Aq+n}{Aq} \right) \right]$$

$$= \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\Theta} \left[\frac{1}{r^n} \left(\frac{Ap+n}{Ap} + \frac{Aq+n}{Aq} - \frac{2 \; Ap+n \; Aq+n}{Ap \; Aq} \right) \right]$$

a że nadzieja matematyczna składek ubespieczonych wyraża się wzorem:

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap+n \; Aq+n}{r^n \; Ap \; Aq} \right]$$

otrzymamy wzór następujący:

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n\;Aq+n}{r^n\;Ap\;Aq}\right]=$$

$$=\gamma\sum_{n=b+1}^{n=\Theta}\left[\frac{1}{r^n}\left(\frac{Ap+n}{Ap}+\frac{Aq+n}{Aq}-2\,\frac{Ap+n\;Aq+n}{Ap\;\;Aq}\right)\right]\;..\;\text{(VI)}$$

DZIAŁ DRUGI.

Ubespieczenie kapitałów.

1. Kapitał jednorazowy. Osoba A płaci jednorazowo sumę α i nadto przez lat a składkę β (z warunkiem jednak że osoba B pozostaje przy życiu) w celu zapewnienia osobie B po upływie lat b kapitał jednorazowy γ.

Nadzieja matematyczna składek opłacanych przez lat a wyraża się wzorem

$$l=\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\frac{Ap+n\;Aq+n}{r\;\;Ap\;Aq}$$

Nadzieja matematyczna kapitału, który towarzystwo ma wypłacić osobie B, jest

$$L=\frac{\gamma}{r^{b+1}}\;\frac{Aq+b+1}{Aq}$$

więc

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\frac{Ap+n\;Aq+n}{r^n\;Ap\;Aq}=\frac{\gamma}{r^{b+1}}\frac{Aq+b+1}{Aq}\;\ldots..\;\text{(VII)}$$

2. Kapitał pośmiertny.

a) *Kapitał pośmiertny dla jednéj osoby oznaczonéj.*

Nadzieja matematyczna składek osoby ubespieczającéj jest jak poprzednio.

$$l=\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n\;Aq+n}{r^n\;Ap\;Aq}\right]$$

Wypłata towarzystwa składa się z kapitału γ płatnego po n latach, którego nadzieja matematyczna $H_n = w\frac{\gamma}{r^n}$ gdzie w oznacza prawdopobieństwo że osoba A umrze po n latach, osoba zaś B pozostanie jeszcze przy życiu. Prawdopodobieństwo że osoba A umrze w roku n^{tym} po zawarciu umowy jest

$$w_1 = \frac{Ap+n-1-Ap+n}{Ap} \quad . . . \text{(III 4)}$$

Prawdopodobieństwo że osoba B pozostanie przy życiu po upływie lat n jest

$$w_2 = \frac{Ap+n}{Ap}$$

Prawdopodobieństwo zatém złożone w wyraża się

$$w = \frac{Aq+n}{Aq}\left(\frac{Ap+n-1-Ap+n}{Ap}\right)$$

więc

$$H_n = \frac{\gamma}{r^n}\frac{Aq+n}{Aq}\left(\frac{Ap+n-1-Ap+n}{Ap}\right)$$

a ponieważ spodziewany wypadek może nastąpić, począwszy od roku $(b+1)^{ego}$ to nadzieja matematyczna wypłaty towarzystwa wyrazi się wzorem

$$L = H_{b+1} + H_{b+2} + . . + H_n + . . = \sum_{n=b+1}^{n=\theta} H_n$$

a że l powinno być równém L, mamy

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n}{r^n\,Ap}\frac{Aq+n}{Aq}\right] = \gamma\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\frac{Aq+n}{r^n\,Aq}\left(\frac{Ap+n-1-Ap+n}{Ap}\right) \text{(VIII)}$$

b) Kapitał pośmiertny bez oznaczenia osoby której ma być wypłacony. Ponieważ w tym przypadku wypłata tak kapitału, jako też składek, jest niezależną od życia lub śmierci osoby B, to należy we wzorze (VIII) położyć $\frac{Aq+n}{Aq}=1$, i otrzymamy

$$\alpha+\beta\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n}{r^n\,Ap}\right] = \gamma\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n-1-Ap+n}{r^n\,Ap}\right] .... \text{(IX)}$$

3. **Kapitał na przeżycie.** Ponieważ opłata składek trwa tylko dopóty, dopóki obie osoby A i B pozostają przy życiu, to

$$l = \alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{A_{p+n} \; A_{q+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right]$$

Ponieważ znowu towarzystwo ma wypłacić ubespieczony kapitał, tak w przypadku gdy osoba A przeżyje osobę B, jako też i w przypadku odwrotnym, mamy więc do czynienia z kapitałem pośmiertnym podwójnym.

Kapitał pośmiertny ubespieczony przez osobę A dla osoby B, pociąga za sobą wydatek towarzystwa.

$$L_1 = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{(A_{p+n-1} - A_{p+n}) \; A_{q+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right] \quad \text{(wzór VIII)}$$

Kapitał pośmiertny ubespieczony przez osobę B dla osoby A daje

$$L_2 = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{(A_{q+n-1} - A_{q+n}) \; A_{p+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right]$$

zatém

$$L = L_1 + L_2 = \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{A_{p+n-1} A_{q+n} + A_{q+n-1} A_{p+n} - 2 A_{p+n} A_{q+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right]$$

a szukane równanie będzie:

$$\alpha + \beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{A_{p+n} \; A_{q+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right] =$$

$$= \gamma \sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{A_{p+n-1} \; A_{q+n} + A_{q+n-1} \; A_{p+n} - 2 \, A_{p+n} \; A_{q+n}}{r^n \; A_p \; A_q} \right] \quad \text{(X)}$$

4. **Kapitał pośmiertny cząstkowy.** Przez to rozumiemy kapitał pośmiertny ubespieczony przy warunku, że osoba odziedziczyć go mająca utraca swoje prawa, jeśli osoba ubespieczona nie umarła w przeciągu pewnéj liczby lat naprzód oznaczonéj c.

Dla otrzymania żądanego wzoru, należy we wzorze (VIII), zamiast granicy wyższéj Θ napisać $c+1$ i otrzymamy:

$$\alpha+\beta \sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{Ap+n \; Aq+n}{r^n \; Ap \; Aq}\right] =$$

$$= \gamma \sum_{n=b+1}^{n=b+c} \frac{Aq+n}{r^n \; Aq} \left[\frac{Ap+n-1 - Ap+n}{Ap}\right] \ldots\ldots \text{(XI)}$$

Rachunki praktyczne, odnoszące się do ubespieczeń pensij i kapitałów.

Wszystkie wzory poprzednio podane, składają się z wyrazów (symbolów):

$$1) \sum_{n=1}^{n=\Theta} \left[\frac{Ap+n}{r^n}\right]$$

$$2) \sum_{n=1}^{n=\Theta} \left[\frac{Ap+n \; Aq+n}{r^n}\right]$$

przy obliczeniu więc praktycznem trzeba będzie znaleść wartość tych sum.

1. Symbol

$$\sum_{n=1}^{n=\Theta} \left[\frac{Ap+n}{r^n}\right] \text{ znaczy } \frac{Ap+1}{r} + \frac{Ap+2}{r^2} + \frac{Ap+3}{r^3} + \ldots\ldots$$

który to szereg kończy się na $A_{96}=0$;

albo też ten symbol znaczy szereg

$$r^p \left[\frac{Ap+1}{r^{p+1}} + \frac{Ap+2}{r^{p+2}} + \frac{Ap+3}{r^{p+3}} + \ldots\right]$$

Wielkość $\frac{Ap+n}{r^{p+n}}$ daje nam wartość dzisiejszą kapitału $Ap+n$ dyskontowaną na lat $p+n$ albo wartość tylu jednostek monet, ilu żyjących wykazuje tablica śmiertelności w roku $(p+n)$ dyskontowaną na dzień urodzenia. Dlategoto wielkości

$$\frac{Ap+1}{r^{p+1}}, \frac{Ap+2}{r^{p+2}}, \frac{Ap+3}{r^{p+3}}, \frac{Ap+4}{r^{p+4}}, \ldots$$

nazywają się *liczbami dyskontowanemi żyjących* w roku $(p+1)^{szym}$, $(p+2)^{gim}$, $(p+3)^{cim}$ i t. d.; oznaczymy te liczby odpowiednio przez D_{m+1}, D_{m+2}, D_{m+3} .... D_{m+n}, takowe podamy obliczone w tab. II na stopę proc. 4, 5 według Süssmilch'a, a w tablicy III według Deparcieux po 6%.

Takie oznaczenie przyjąwszy, będzie

$$\sum_{n=1}^{n=\theta} \left[\frac{Ap+n}{r^n}\right] = r^p \left[Dp+1 + Dp+2 + \ldots + Dp+n + \ldots\right] =$$

$$= r^p \sum_{n=1}^{n=\theta} [Dp+n]$$

Szereg ten kończy się na $D_{96} = \frac{A_{96}}{r^{96}} = 0$

$\sum_{n=1}^{n=\theta} [Dp+n]$ nazywa się sumą liczb dyskontowanych od roku życia $(p+1)^{go}$ do kresu życia, a którą to sumę łatwo otrzymać można z tablic dających nam liczby Dp sumując je od końca. Oznaczymy te sumy przez E_0, E_1, E_2 ....

tak że $\sum_{n=1}^{n=\theta} \left[Dp+n\right] = Ep+1$. Sumy te znajdziemy w tablicach II i III

Np. dla $p=20$, $D_{20} = 185,^{05}$, $E_{20} = 2895,^{10}$ gdzie $r = 1,^{05}$ lub stopa procentowa=5.

Więc

$$\sum_{n=1}^{n=\theta} \left[\frac{Ap+n}{r^n}\right] = r^p\ Ep+1$$

$$\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n}{r^n\ Ap}\right]=Ep+1:\frac{Ap}{r^p}=\frac{Ep+1}{Dp}=Rp\ \ldots\ (\alpha)$$

i w ogólności

$$\sum_{n=v}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n}{r^n\ Ap}\right]=\frac{Ep+v}{Dp}\ \ldots\ldots\ (\beta)$$

Wzór (α) daje nam pensję roczną nieodroczoną wartości jednéj jednostki monety (bo w tym przypadku $\gamma=1$) dla osoby p letniéj, jak to wypada z wzoru (I) kładąc w nim $b=\beta=0$.

Tak np. dla $r=1{,}05$, $R_{28}=\frac{E_{21}}{D_{20}}=\frac{2710{,}^{06}}{185{,}^{05}}=14{,}^{645}$ = wartości pensji rocznéj jednego rubla dla osoby 20-letniéj.

Ponieważ

$$\sum_{n=o}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n+1}{r^{n+1}\ Ap}\right]=\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+1}{r^n\ Ap}\right]$$

$$\sum_{n=u}^{n=v}(Dp+n)=Dp+u+Dp+u+1+Dp+u+2+\ldots+Dp+v=$$
$$[Dp+u+Dp+u+1+\ldots+D_{95}]-[Dp+v+1+Dp+v+2+\ldots+D_{95}]$$

to

$$\sum_{n=u}^{n=v}(Dp+n)=Ep+u-Ep+v+1 \text{ i}$$

$$\sum_{n=u}^{n=v}\left[\frac{Ap+n}{r^n\ Ap}\right]=\frac{Ep+u-Ep+v+1}{Dp}\ \ldots\ (\gamma)$$

Jeżeli założymy $u=b+1$, $v=b+c$, otrzymamy

$$\sum_{n=b+1}^{n=b+c}\left[\frac{Ap+n}{r^n\ Ap}\right]=\frac{Ep+b+1-Ep+b+c+1}{Dp}\ \ldots\ (\delta)$$

a kładąc w tym wzorze $b=\infty$, $c=a$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{n=a}\left[\frac{Ap+n}{r^n\,Ap}\right]=\frac{Ep+1-Ep+a+1}{Dp}\quad\ldots\ldots(\varepsilon)$$

Dla otrzymania tablic, w którychby były zestawione wartości pensij dożywotnich dla różnych wieków służy następująca metoda.

Widzieliśmy że

$$Rm=\frac{\gamma}{Am}\left[\frac{Am+1}{r}+\frac{Am+2}{r^2}+\frac{Am+3}{r^3}+\ldots\right]$$

$$Rm-1=\frac{\gamma}{Am-1}\left[\frac{Am}{r}+\frac{Am+1}{r^2}+\frac{Am+2}{r^3}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\gamma\,Am}{r\,Am-1}+\frac{Am}{r\,Am-1}\cdot\frac{\gamma}{Am}\left[\frac{Am+1}{r}+\frac{Am+2}{r^2}+\ldots\right]$$

$$=\frac{Am}{r\,Am-1}\left[\gamma+Rm\right]=\frac{\frac{Am}{r^m}}{\frac{Am-1}{r^{m-1}}}\left[\gamma+Rm\right]=\frac{Dm}{Dm-1}\left[\gamma+Rm\right]$$

Za pomocą tego wzoru, mając pensję dożywotnią dla wieku m, możemy łatwo obliczyć pensję dożywotnią dla osoby o rok młodszéj. Dla otrzymania więc żądanéj tablicy, dość rospocząć od wieku $m=95$ dla którego

$$R_{95}=\frac{\gamma}{A_{95}}\left[\frac{A_{96}}{r}+\ldots\right]=\frac{\gamma}{1}\,0=0$$

Kładąc więc $p=5\%$, a tém samém $\frac{1}{r}=0{,}9524$ i $\gamma=1$, otrzymamy

$$R_{95}=0$$

$$R_{94}=\frac{A_{95}}{r.\,A_{94}}\left[1+R_{95}\right]=\frac{1}{2}\cdot 0{,}9524\,(1+0)=0{,}4762$$

$$R_{93}=\frac{A_{94}}{r.\,A_{93}}\left[1+R_{94}\right]=\frac{2}{3}\times0{,}9524\times1{,}4762=0{,}9373$$

$$R_{92}=\frac{A_{93}}{r.\,A_{92}}\left[1+R_{93}\right]=\frac{3}{4}\times0{,}9524\times1{,}9373=1{,}3838$$

$$R_{91}=\frac{A_{92}}{r.\,A_{91}}\left[1+R_{92}\right]=\frac{4}{5}\times0{,}9524\times2{,}3838=1{,}8163$$

$$R_{90}=\frac{A_{91}}{r.\,A_{90}}\left[1+R_{91}\right]=\frac{5}{6}\times0{,}9524\times2{,}8163=2{,}235 \text{ i t. d.}$$

Wartość np. pensji dożywotniéj **1000** rubli dla osoby **90**-letniéj wynosi **$2{,}^{235}\times1000=2235$** rubli.

2. Obliczenie symbolu $\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n}\right] = \left[\frac{Ap+1\ Aq+1}{r}\right] +$

$$+ \frac{Ap+2\ Aq+2}{r^2} + \frac{Ap+3\ Aq+3}{r^3} + \dots$$

Szereg ten przerywa się skoro, $p+n$, lub $q+n$ staje się równém 96.

Ponieważ

$$Ap+1 = Ap - Bp$$
$$Ap+2 = Ap+1 - Bp+1 = Ap - Bp - Bp+1$$
$$Ap+3 = Ap+2 - Bp+2 = Ap - Bp - Bp+1 - Bp+2$$

. . . .

gdzie Bp oznacza liczbę osób zmarłych w p^{tym} roku życia z liczby Ap żyjących; zatém

$$\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n}\right] = \frac{Aq+1\ [Ap-Bp]}{r} + \frac{Aq+2\ (Ap-Bp-Bp+1)}{r^2}$$
$$+ \frac{Aq+3\ (Ap-Bp-Bp+1-Bp+2)}{r^3} + \dots$$

Po łatwém przekształceniu otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n}\right] = Ap.\ r^q\left[\frac{Aq+1}{r^{q+1}} + \frac{Aq+2}{r^{q+2}} + \frac{Ap+3}{r^{q+3}} + \dots\right] -$$
$$Bpr^q\left[\frac{Aq+1}{r^{q+1}} + \frac{Aq+2}{r^{q+2}} + \dots\right] - Bp+1\ r^q\left[\frac{Aq+2}{r^{q+2}} + \dots\right] - \dots$$
$$= r^q\ [Ap\ Eq+1 - Bp\ Eq+1 - Bp+1\ Eq+2 - Bp+2\ Eq+3 - \dots]$$

Ponieważ dalej

$$Bp+1 = Bp - [Bp - Bp+1]$$
$$Bp+2 = Bp+1 - (Bp+1 - Bp+2) = Bp - [Bp - Bp+1] - [Bp+1 - Bp+2]$$
$$Bp+3 = Bp+2 - (Bp+2 - Bp+3) = Bp - [Bp - Bp+1] - [Bp+1 - Bp+2] - [Bp+2 - Bp+3]$$

. . . .

zatém po uskutecznieniu redukcji, otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{n=\theta} \frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n} = r^q\ [Ap\ Eq+1-Bp\ (Eq+1+Eq+2+Eq+3+..)$$

$$+(Bp-Bp+1)\ (Eq+2+Eq+3+\ ...)+\ (Bp+1-Bp+2)$$
$$(Eq+3+Eq+4+..)+(Bp+3-Bp+2)\ (Eq+4+Eq+5+...)+...)]$$

Różnice $Bp-Bp+1$, $Bp+1-Bp+2$ .... przedstawiają nam różnice zachodzące między liczbami zmarłych w dwóch latach kolejno po sobie następujących.

Różnice te możemy otrzymać z tablic II i III, gdzie są oznaczone literą $\delta_p = B_m - B_{m+1}$.

Sumy $(Eq_{+1} + Eq_{+2} + Eq_{+3} + ...)$, $(Eq_{+2} + Eq_{+3} + ...)$ oznaczone są literą $E'q_{+1}$. $E'q_{+2}$ ....

$$\sum_{n=1}^{n=\theta} \left[\frac{Ap+n.\ Aq+n}{r^n}\right] = r_q \left[Ap\ Eq_{+1} - Bp\ E'q + \delta_p\ E'q_{+2} + \delta_{p+1}\ E'q_{+3} + \ ...\right]$$

Za q bierzemy zawsze wiek starszy, bo wtedy szereg prędzéj się przerywa.

Metoda ta podana przez Tetens'a jest bardzo wygodną, bo jak widzimy z tablic II i III różnice te, począwszy od 10-go roku życia, są stale równe 0, + 1 lub —1, przez co w największéj liczbie przypadków sumowanie powyższego szeregu sprowadza się do dodawania lub odejmowania

$$\text{Tak np. } G_{40}^{60} = \sum_{n=1}^{n=\theta} \left[\frac{A_{40}+n\ A_{60}+n}{r^n}\right]$$

$$= r^{60}\left[A_{40}\ E_{61} - B_{40}\ E'_{61} + \delta_{40}\ E'_{62} + \delta_{41}\ E'_{63} + \ .... \ \delta_{73}\ E'_{95}\right]$$

Za pomocą tablic II i III i przy $r=1{,}05$ znajdziemy

$A_{40}\ E_{61} = 374 \times 87{,}^{37} = 32676{,}^{38}$; $B_{40}\ E'_{61} = 7 \times 632{,}^{95} = 4\,430{,}^{65}$ daléj

$\delta_{40} = \delta_{41} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{44} = \delta_{46} = \delta_{47} = \delta_{48} = \delta_{50} = \delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{53} = \delta_{54} = \delta_{55} = \delta_{56} = \delta_{57} = \delta_{58} = \delta_{59} = \delta_{60} = \delta_{62} = \delta_{63} = \delta_{64} = \delta_{65} = \delta_{66} = \delta_{67} = \delta_{68} = \delta_{70} = \delta_{71} = \delta_{73} = 0$; $\delta_{45} = \delta_{49} = \delta_{61} = -1$; $\delta_{69} = \delta_{72} = +1$.

Powyższa zatém suma sprawdza się do

$$\begin{array}{l} 32676,^{38}-4430,^{65} \\ \quad 0,^{38}-\ 244,^{47} \\ \quad 0,^{04}-\ 118,^{70}-7,^{42} \\ \hline 32676,^{80}-4793,^{82}-7,^{42}=32676,^{80}-4801,^{21}=27875,^{56} \end{array}$$

a ponieważ $r^{60}=18,^{679186}$, to

$$\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{A_{60+n}\,A_{40+n}}{r^n}\right]=18,^{679186}\times 27875,^{56}=520692,^{77}=\mathrm{G}_{60}^{40}$$

Z wzoru (ς) wypada

$$\sum_{n=1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\quad Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]=\frac{r^q}{Ap\ Aq}\left[Ap\,Eq+1+Bp\,E'q+1+\delta p\,E'q+2+..\right]$$

$$=\frac{1}{Ap\,Aq}\mathrm{G}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{q}}=\mathrm{R}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{q}}\ .\ .\ .\ (\eta)$$

jest to wartość pensji dożywotniéj dla małżeństw, wynoszącéj jednostkę monety dla osób wieku lat p i q tab. IV i V.

W powyższym przykładzie $\mathrm{R}_{60}^{40}=\dfrac{520692,77}{374\times 210}=6,62965$, a zatém wartość takiéj pensji wynoszącéj 100 jed. monety, będzie 662,965.

Jeżeli pensja dożywotnia dla małżeństw ma trwać tylko przez pewien czas np. od roku u^{tego} po zawarciu umowy aż do roku v^{tego}, należy obliczyć sumę

$$\sum_{n=u}^{n=v}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right],$$ którą to sumę znajdziemy jeżeli od sumy

$$\sum_{u=u}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]$$ odejmiemy sumę $$\sum_{n=v+1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]$$

a kładąc $u=b+1$, $v=b+c$, otrzymamy

$$\sum_{n=b+1}^{n=b+c}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]=\sum_{n=b+1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\ Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]-\sum_{n=b+c+1}^{n=\theta}\left[\frac{Ap+n\,Aq+n}{r^n\ Ap\ Aq}\right]$$

$$=\frac{1}{Ap\ Aq}\left[\frac{1}{r^b}\mathrm{G}_{\mathrm{p+b}}^{\mathrm{q+b}}-\frac{1}{r^{b+c}}\mathrm{G}_{\mathrm{p+b+c}}^{\mathrm{q+b+c}}\right]$$

Jeżeli założymy $b = o$, $c = a$ to

$$\sum_{n=1}^{n=a} \left[\frac{A_{p+n-1}\, A_{q+n}}{r^n\, A_p\, A_q} \right] = \frac{1}{A_p\, A_q} \left[G_p^q - \frac{1}{r^a} G_{p+a}^{q+a} \right] \ldots . \ (\theta)$$

Tak samo znajdziemy

$$\sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{A_{p+n}\, A_{q+n}}{r^n\, A_p\, A_q} \right] = \frac{1}{r^b\, A_p\, A_q} G_{p+b}^{q+b} \ldots . \ (\iota)$$

$$\sum_{n=b+1}^{n=\theta} \left[\frac{A_{p+n-1}\, A_{q+n}}{r^n\, A_p\, A_q} \right] = \frac{1}{r^b\, A_p\, A_q} G_{q+b}^{p+b-1} \ldots . \ (\varkappa)$$

Ostatni wzór służy do obliczenia kapitałów pośmiertnych.

T A B. I.

n	r^n			$\frac{1}{r^n}$		
	$r=1.04$	$r=1.05$	$r=1.06$	$r=1.04$	$r=1.05$	$r=1.06$
1	1.040000	1 050000	1 060000	0.961538	0.952381	0.943396
2	1.081600	1 102500	1.123600	0.924556	0.907029	0.889996
3	1.124864	1.157625	1.191016	0.888996	0.863838	0.839619
4	1 169859	1 215506	1 262477	0.854804	0.822702	0.792094
5	1.216653	1 276282	1.383226	0.821927	0.783526	0.747258
6	1.265913	1 340096	1.418519	0.790315	0.746215	0.704961
7	1.315932	1.407100	1.503630	0 759918	0.710681	0.665057
8	1.368569	1.477455	1 593848	0.730690	0.676839	0.627412
9	1.423312	1.551328	1.689479	0.702587	0.644609	0.591898
10	1.480244	1 628895	1 790848	0 675564	0.613913	0.558395
11	1.539454	1.710339	1.898299	0.649581	0.584679	0 526788
12	1.601032	1.795856	2 012169	0.624597	0.556837	0.496969
13	1.665074	1 885649	2.132928	0.600574	0.530321	0.468839
14	1.731676	1.979932	2.260904	0 577475	0 505068	0.442301
15	1.800944	2 078928	2 396558	0 555265	0.481017	0.417265
16	1 872981	2.182875	2.540352	0.533908	0.458112	0.393646
17	1.947901	2.292018	2.692773	0.513373	0.436297	0.371364
18	2 025817	2.406619	2.854339	0 493628	0 415521	0 350344
19	2 106849	2.526950	3.025600	0.474642	0.395734	0.330513
20	2.191123	2 653298	3.207135	0.456387	0.376889	0 311805
21	2.278768	2.785963	3.399564	0 438834	0.358942	0 294155
22	2.369919	2.925261	3 603537	0 421955	0.341850	0.277505
23	2.464716	3.071524	3.819750	0.405726	0.325571	0 261797
24	2.563304	3 225100	4.048935	0.390121	0 310068	0.246979
25	2.665836	3 386355	4 291871	0.375117	0 295303	0 232999
26	2.772470	3 555673	4 549383	0.360689	0 281241	0.219810
27	2.883369	3 733456	4.822346	0 346817	0 267848	0.207368
28	2.998703	3 920129	5.111687	0 333477	0 255094	0.195630
29	3.118651	4 116136	5.418388	0 320651	0.242946	0.184557
30	3.243398	4 321942	5 743491	0.308319	0 231377	0.174110
31	3.373133	4.538039	6.088101	0.296460	0.220359	0.164255
32	3.508059	4 764941	6.453387	0.285058	0 209866	0.154957
33	3 648381	5.003189	6.840590	0 274094	0.199873	0.146186
34	3.794316	5.253348	7.251025	0 263552	0 190355	0.137912
35	3.946089	5 516015	7.686087	0 253415	0.181290	0.130105
36	4.103933	5 791816	8.147252	0.243669	0.172656	0.122741
37	4.268090	6.081407	8 636087	0.234297	0.164436	0 115793
38	4 438813	6.385477	9.164252	0.225285	0.156605	0.109239
39	4.616366	6.704751	9 703507	0.216621	0 149148	0.103056
40	4.801021	7.039989	10 285718	0.208289	0.142046	0 097222
41	4.993061	7.391988	10.902861	0 200278	0.135282	0.091719
42	5.192784	7.761588	11.557033	0.192575	0.128840	0 086527
43	5.400495	8.149667	12.250445	0.185168	0.122704	0.081630
44	5.616515	8.557150	12.985482	0.178046	0.116861	0 077009
45	5.841176	8.985008	13.764611	0.171198	0.111297	0.072650

n	r^n			$\frac{1}{r^n}$		
	$r=1.04$	$r=1.05$	$r=1{\cdot}06$	$r=1.04$	$r=1.05$	$r=1.06$
46	6.074823	9.434258	14 590487	0.164614	0.105997	0.068538
47	6.317816	9.905971	15.465917	0.158283	0.100940	0.064658
48	6.570528	10 401270	16.393872	0.152195	0.096142	0.060998
49	6.833349	10.921333	17.377504	0 146341	0.091564	0.057546
50	7 106683	11.467400	18 420154	0.140713	0 087204	0.054288
51	7.390951	12.040770	19 525364	0.135301	0 073051	0 051215
52	7.686589	12.642808	20 696885	0.130097	0.079096	0.048316
53	7.994052	13 274949	21 938698	0.125093	0.075330	0.045582
54	8.313814	13.938696	23.255020	0.120282	0.071743	0.043001
55	8 646367	14.635631	24 650322	0.115656	0.068326	0.040567
56	8 992222	15.367412	26.129341	0.111207	0:065073	0.038271
57	9.351910	16.135783	27.697101	0.106930	0.061974	0.036105
58	9.725987	16.942572	29.358927	0.102817	0.059023	0.034061
59	10 115026	17.789701	31.120463	0.098863	0.056212	0.032133
60	10 519627	18 679186	32.989691	0 095060	0.053536	0.030314
61	10.940413	19.613145	34.966952	0.091404	0.050986	0.028598
62	11.378029	20.593802	37.064969	0.087889	0.048558	0 026980
63	11 833150	21.623493	39.288868	0.084508	0.046246	0.025453
64	12.306476	22 704667	41.646200	0.081258	0.044044	0.024012
65	12 798735	23.839901	44.144972	0.078133	0.041946	0.022653
66	13.310685	25.031896	46.793670	0.075128	0 039949	0.021370
67	13 843112	26.283490	49.601290	0.072238	0.038047	0.020161
68	14 396836	27 597665	52.577368	0 069460	0.036235	0.019020
69	14.972710	28.977548	55.732010	0.066788	0.034509	0 017943
70	15.571618	30 426427	59.075930	0.064219	0.032866	0.016927
71	16 194483	31.947747	62 620486	0.061749	0.031301	0.015969
72	16 842262	33.545134	66.377715	0.059374	0.029811	0.015065
73	17 515953	35.222391	70 360378	0.057091	0.028391	0.014213
74	18.261591	36.983510	74.582001	0.054894	0.027039	0.013408
75	18.945255	38.832686	79.056921	0.052784	0.025752	0.012649
76	19.703065	40.774320	83.800336	0 050754	0.024525	0.011933
77	20 491187	42.813036	88 828356	0.048801	0.023357	0.011258
78	21 310835	44 953688	94.158058	0.046924	0.022245	0.010620
79	22.163268	47 201372	99.807541	0.045120	0.021186	0.010019
80	23.049799	49.561441	105 795993	0.043384	0.020177	0.009452
81	23.971791	52.039513	112.143753	0.041716	0.019216	0.008917
82	24 930663	54.641489	118.872378	0.040111	0 018301	0.008412
83	25.927889	57.373563	126.004721	0.038569	0.017430	0.007936
84	26 965005	60.242241	133 565004	0.037085	0.016600	0.007487
85	28 043605	63.254353	141 578904	0.035659	0.015809	0.007063
86	29.165349	66.417071	150.073639	0 034287	0.015056	0.006663
87	30.331963	69.737925	159.078057	0 032969	0.014339	0.006286
88	31.545242	73 224821	168 612741	0.031701	0.013657	0 005930
89	32.807051	76 886062	178 740105	0 030481	0.013006	0.005595
90	34.119333	80.730365	189 464511	0 029309	0.012387	0.005278
91	35.484107	84.766883	200 832382	0 028182	0.011797	0.004979
92	36 903471	89 005227	212.882325	0.027098	0.011235	0.004697
93	38.379610	93 455489	225.655264	0.026056	0.010700	0.004432
94	39 914794	98.128263	239 194580	0.025053	0.010191	0.004181
95	41.511386	103.034676	253.546255	0.024090	0.009705	0.003944

TAB. II.

p	δp	Dp ($r=1.04$)	Ep ($r=1.04$)	$E\,p$ ($r=1.04$)	Dp ($r=1.05$)	Ep ($r=1.05$)	$E'p$ ($r=1.05$)
0	+ 161	1000.00	12431.48	210074.50	1000.00	10782.28	160748.06
1	46	721.15	11431.48	197643.02	714.29	9782.28	149966.28
2	18	611.13	10710.33	186211.54	599.55	9067.99	140184.00
3	11	549.40	10099 20	175501.21	533.85	8468 45	131116.01
4	2	506 90	9549.80	165402.01	487 86	7934.59	122647.56
5	+ 1	475.90	9042 90	155852.21	453.66	7446.73	114712.97
6	2	448.11	8567.00	146809.31	423.10	6993.07	107266.24
7	1	422.51	8118.89	138242.31	395.14	6569.97	100273.17
8	1	399.69	7696.38	130123.42	370.23	6174.83	93703.20
9	2	378.69	7296.69	122427.04	347.44	5804.60	87528.37
10	+ 1	359 40	6918.00	115130.35	326.60	5457.15	81723.77
11	0	342.33	6558.60	108212.35	308.13	5130.55	76266.62
12	0	326.66	6216.27	101653.75	291.23	4822.42	71136.07
13	0	311.70	5889.61	95437 48	275.24	4531 20	66313.65
14	0	297.40	5577.91	89547.87	260.11	4255.96	61782.45
15	0	283.74	5280 51	83969 96	245.80	3995.85	58526.49
16	0	270.69	4996.77	78689.45	232.26	3750.05	53530.64
17	0	258.23	4726.08	73692.68	219.46	3517.79	49780.59
18	0	246 32	4467 85	68966.60	207.34	3298.33	46262.80
19	— 1	234.95	4221.53	64498.75	195.89	3[illegible].99	42964.47
20	0	224.09	3986.58	60277.22	185.05	2[illegible]95.10	39873.48
21	0	213.27	3762 49	56290.64	174.45	2710.06	36978.38
22	0	202.96	3549 22	52528.15	164.43	2535.60	34268 32
23	0	193.13	3446.26	48978 93	154.97	2371.17	31732.72
24	0	183.75	3153 13	45632.67	146.04	2216.20	29361.55
25	0	174.80	2969 38	42479 54	137.61	2070.16	27145 35
26	0	166.28	2794 50	39510.16	129.65	1932.54	25075.19
27	— 1	158 15	2628.30	36715.58	122.14	1802,89	23142.65
28	0	150.40	2470.15	34087.28	115.05	1680.75	21339.76
29	0	142.69	2319.75	31617.13	108.11	1565.71	19659.01
30	0	135.35	2177 06	29297.38	101.57	1457.60	18093.30
31	0	128 37	2041.71	27120.32	95.42	1356 02	16635.70
32	0	121.72	1913.34	25078.61	89.61	1260.61	15279.68
33	0	115.39	1791.62	23165 27	84.15	1170.99	14019.07
34	— 1	109.37	1676 23	21373.65	79.00	1086.84	12848.08
35	0	103.65	1566 86	19697 42	74.15	1007.85	11761.24
36	0	97.95	1463.21	18130.56	69.41	933.70	10753.39
37	0	92.55	1365 26	16667.35	64.95	864.29	9819.69
38	0	87.41	1272.71	15302.09	60.76	799.34	8955.40
39	0	82.53	1185.30	14029.38	56 82	738.58	8156.06
40	0	77.90	1102 77	12844.08	53.12	681.75	7417.48
41	0	73.50	1024 87	11741.31	49.65	628.63	6735.73
42	0	69.33	951.37	10716.44	46.38	578.98	6107.10
43	0	65.36	882.04	9765.07	43.31	532.51	5528.12
44	0	61.60	816.68	8883.03	40.42	489.28	4995.61
45	— 1	58.04	755.08	8066.35	37.73	448.85	4506.33
46	0	54 65	697.04	7311.27	35.19	411.12	4057.48
47	0	51.28	642.39	6614.23	32 71	375.93	3646.36
48	0	48 09	591.11	5971.84	30.38	343.22	3270.43
49	— 1	45.04	543.02	5380.73	28.20	312.84	2927.21

p	δp	Dp	Ep	$E'p$	Dp	Ep	$E'p$
		$r=1.04$			$r=1.05$		
50	0	42.21	497.95	4837.71	26.16	284.64	2614.37
51	0	39.37	455.74	4339.76	24.17	258.48	2329.73
52	0	36.69	416.37	3884.02	22.31	234.31	2071.25
53	0	34.15	379.66	3467.65	20.56	212.00	1836.94
54	0	31.75	345.53	2087.97	18.94	191.44	1624.94
55	0	29.49	313.78	2742.44	17.42	172.50	1433.50
56	0	27.36	284.29	2428.66	16.01	155.08	1261.00
57	0	25.34	256.93	2144.37	14.69	139.07	1105.93
58	0	23.44	231.59	1887.44	13.46	124.38	966.86
59	0	21.65	208.15	1655.85	12.31	110.92	842.48
60	0	19.96	186.60	1447.70	11.24	98.61	731.56
61	— 1	18.37	166.54	1261.10	10.25	87.37	632.95
62	0	16.87	148.17	1094.56	9.32	77.12	545.58
63	0	15.38	131.30	946.39	8.42	67.80	468.46
64	0	13.98	115.92	815.09	7.57	59.38	400.66
65	0	12.66	101.94	699.17	6.79	51.80	341.28
66	0	11.42	89.28	597.23	6.07	45.01	289.48
67	0	10.26	77.86	507.95	5.40	38.94	244.47
68	0	9.17	67.60	430.09	4.78	33.54	205.53
69	+ 1	8.15	58.43	362.49	4.21	28.75	171.99
70	0	7.19	50.28	304.06	3.68	24.54	143.24
71	0	6.36	43.09	253.78	3.22	20.86	118.70
72	+ 1	5.58	36.73	210.69	2.80	17.64	97.84
73	0	4.83	31.15	173.96	2.41	14.83	80.20
74	+ 1	4.23	26.30	142.81	2.08	12.42	65.37
75	0	3.64	22.07	116.51	1.78	10.34	52.95
76	+ 1	3.15	18.43	94.44	1,52	8.56	42.61
77	0	2.68	15.28	76.01	1.28	7.04	34.05
78	0	2.30	12.60	60.73	1.09	5.76	27.01
79	+ 1	1.94	10.30	48.13	0 91	4.67	21.25
80	+ 1	1.61	8.36	37.83	0.75	3.76	16.58
81	0	1.33	6.75	29.47	0.61	3.01	18.82
82	0	1.12	5.42	22.72	0.51	2.39	9.81
83	+ 1	0.93	4.30	17.30	0.42	1.88	7.42
84	0	0.74	3.37	13.00	0.33	1.46	5.54
85	+ 1	0.61	2.63	9.63	0.27	1.13	4.08
86	0	0.48	2.02	7.00	0.21	0.86	2.95
87	0	0.40	1.54	4.98	0.17	0.65	2.09
88	0	0.32	1.14	3.44	0.14	0.48	1.44
89	+ 1	0.24	0.82	2.30	0.10	0.34	0.96
90	0	0.18	0.58	1.48	0.07	0.24	0.62
91	0	0.14	0 40	0.90	0.06	0.17	0.38
92	0	0.11	0.26	0.50	0.04	0.11	0.21
93	0	0.08	0.15	0.24	0.03	0.06	0.10
94	0	0.05	0.07	0.09	0.02	0.03	0.04
95	+ 1	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01

TAB. III.

p	Ap	Bp	Cp	Dp	Ep	E'p	δp
3	1000	30	48207	839.619	12082.820	174172.375	+ 8
4	970	22	47207	768.331	11243.201	162089.555	4
5	948	18	46237	708.401	10474.870	150846.354	3
6	930	15	45289	655.614	9766.469	140271.484	2
7	915	13	44359	608.527	9110.855	130605.015	1
8	902	12	43444	565.926	8502.328	121494.160	2
9	890	10	42542	526 789	7936.402	112991.832	2
10	880	8	41652	491.388	7409.613	105055.430	2
11	872	6	40772	459.359	6918.225	97645.817	0
12	866	6	39900	430.375	6458.866	90727.592	0
13	860	6	39034	403.202	6028.491	84268.726	0
14	854	6	38174	377.725	5625.289	78240 235	0
15	848	6	37320	353.841	5247.564	72614.946	— 1
16	842	7	36472	331.450	4893 723	67367.382	0
17	835	7	35630	310.089	4562.273	62473.659	0
18	828	7	34795	290 085	4252.184	57911.386	0
19	821	7	33967	271.351	3962.099	53659.202	— 1
20	814	8	33146	253.809	3690.748	49697.103	0
21	806	8	32332	237.089	3436.939	46006.355	0
22	798	8	31562	221 449	3199.850	42569.416	0
23	790	8	30728	206.820	2978.401	39369 566	0
24	782	8	29938	193 138	2771.581	36391.165	0
25	774	8	29156	180.341	2578.443	33619.584	0
26	766	8	28382	168.374	2398.102	31041.141	0
27	758	8	27616	157.185	2229.728	28643.039	0
28	750	8	26858	146.723	2072.543	26413.311	0
29	742	8	26108	136.941	1925.820	24340.768	0
30	734	8	25366	127.797	1788.879	22414.948	0
31	726	8	24632	119.249	1661.082	20626.069	0
32	718	8	23906	111.259	1541.833	18964 987	0
33	710	8	23188	103.792	1430.574	17423.154	0
34	702	8	22478	96.814	1326.782	15992.580	0
35	694	8	21776	90.293	1229.968	14665.798	0
36	686	8	21082	84.200	1139.675	13435.830	+ 1
37	678	7	20396	78.508	1055.475	12296.155	0
38	671	7	19718	73.299	976.967	11240 680	0
39	664	7	19047	68.429	903.668	10263.713	0
40	657	7	18383	63.875	835.239	9360.045	0
41	650	7	17726	59.617	771.364	8524.806	0
42	643	7	17076	55.637	711.747	7753.442	0
43	636	7	16433	51.917	656 110	7041.695	0
44	629	7	15797	48.439	604.193	6385.585	0
45	622	7	15168	45.188	555.754	5781.392	— 1
46	615	8	14546	42.151	510.566	5225.638	0
47	607	8	13931	39.247	468.415	4715.072	— 1
48	599	9	13324	36.538	429.168	4246.657	0
49	590	9	12725	33.952	392.630	3817.489	— 1
50	581	10	12135	31.541	358.678	3424.859	— 1
51	571	11	11554	29.244	327.137	3066.181	0
52	560	11	10983	27.057	297.893	2739.044	0
53	549	11	10423	25.024	270.836	2441.151	— 1
54	538	12	9874	23.135	245.812	2170.315	0

p	Ap	Bp	Cp	Dp	Ep	E'p	δp
55	526	12	9336	21.338	222.677	1924.503	0
56	514	12	8810	19.671	201.339	1701.826	— 1
57	502	13	8296	18.125	181.668	1500.487	0
58	489	13	7794	16.656	163.543	1318.819	0
59	476	13	7305	15.295	146.887	1155.276	0
60	463	13	6829	14.035	131.592	1008.389	0
61	450	13	6366	12 869	117.557	876.797	— 1
62	437	14	5916	11.790	104.688	759.240	0
63	423	14	5479	10.766	92 899	654.552	0
64	409	14	5056	9.821	82.132	561.654	— 1
65	395	15	4647	8.948	72.311	479.522	— 1
66	380	16	4252	8.121	63.363	407.211	— 1
67	364	17	3872	7.339	55.242	343.848	— 1
68	347	18	3508	6.599	47.903	288.606	— 1
69	329	19	3161	5.903	41.304	240.703	0
70	310	19	2832	5.247	35.401	199.399	— 1
71	291	20	2522	4.647	30.154	163.998	0
72	271	20	2231	4.083	25.507	133.844	0
73	251	20	1960	3.567	21.424	108.337	0
74	231	20	1709	3.097	17.857	86.913	+ 1
75	211	19	1478	2.669	14.760	69.056	0
76	192	19	1267	2.291	12.091	54.296	0
77	173	19	1075	1.948	9.800	42.205	+ 1
78	154	18	902	1.635	7.852	32.405	0
79	136	18	748	1.363	6 217	24.553	+ 1
80	118	17	612	1.115	4.854	18.336	+ 1
81	101	16	494	0.901	3.739	13.482	+ 2
82	85	14	393	0.715	2.838	9.743	+ 2
83	71	12	308	0.563	2.123	6.905	+ 1
84	59	11	237	0.442	1.560	4.782	+ 1
85	48	10	178	0.339	1.118	3.222	+ 1
86	38	9	130	0.253	0.779	2.104	+ 2
87	29	7	92	0.182	0.526	1.325	+ 1
88	22	6	63	0.130	0.344	0.799	+ 1
89	16	5	41	0.089	0.214	0.455	+ 1
90	11	4	25	0.058	0.125	0.241	+ 1
91	7	3	14	0.035	0.067	0 116	+ 1
92	4	2	7	0.019	0.032	0.049	+ 1
93	2	1	3	0.009	0.013	0.017	0
94	1	1	1	0.004	0.004	0.004	+ 1
95	0	0	0				

TAB. IV.

wiek *p*	*q*. 15	20	25	30	35	40	45	50
15	14.63							
20	14.13	13.68						
25	13.64	13.22	12.81					
30	13.04	12.67	12.31	11 85				
35	12.36	12.04	11.73	11.32	10.86			
40	11.68	11.40	11.13	10.78	10.37	9.95		
45	10.80	10.56	10.34	10 05	9.71	9.35	8.84	
50	9.83	9.63	9.46	9.22	8.93	8.65	8.22	7.69
55	8.88	8.72	8.58	8 39	8.16	7.94	7.59	7.14
60		7.65	7.53	7.40	7.22	7.06	6.78	6.43
65			6.47	6.36	6.22	6.10	5.90	5.62
70				5.48	5.38	5.29	5.13	4.92
75					4.61	4.55	4.44	4.28
80						3.85	3.77	3.65
85							3.05	2.98
90								2.31

p	*q*. 55	60	65	70	75	80	85	90
55	6.69							
60	6.07	5.56						
65	5.35	4.95	4.44					
70	3.72	4.40	3.99	3.61				
75	4.13	3 88	3.55	3.24	2.94			
80	3.55	3.37	3.11	2.87	2.62	2.37		
85	2 91	2.80	2.62	2.45	2.27	2 07	1.86	
90	2.10	2.05	1.96	1.87	1.78	1.66	1.54	1.42

TAB. V.

wiek p	q. 5	10	15	20	25	30	35	40	45
5	12.83								
10	13.15	13.50							
15	12.87	13.22	12.97						
20	12.45	12.80	12.57	12.21					
25	12.03	12.39	12.18	11.85	11.52				
30	11.54	11.89	11.71	11.41	11.11	10.74			
35	10.97	11.31	11.16	10.89	10.63	10.30	9.91		
40	10.40	10.73	10.57	10.37	10.14	9.85	9.50	9.15	
45	9.60	9.98	9.87	9.67	9.48	9.23	8.94	8.64	8.16
50	8.83	9.13	9.05	8.88	8.73	8.52	8.28	8.03	7.65
55	8.02	8.30	8.24	8.10	7.98	7.81	7.61	7.41	7.10
60	7.07	7.31	7.27	7.16	7.07	6.93	6.78	6.63	6.38
65	6.06	6.28	6.25	6.17	6.10	6.00	5.88	5.77	5.58
70	5.23	5.41	5.39	5.34	5.28	5.20	5.11	5.03	4.89
75	4.47	4.63	4.62	4.57	4.53	4.47	4.41	4.35	4.25
80	3.77	3.89	3.88	3.86	3.84	3.79	3.74	3.70	3.63
85	3.03	3.13	3.13	3.10	3.09	3.06	3.05	3.01	2.96
90	2.14	2.19	2.20	2.19	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12

p	q. 50	55	60	65	70	75	80	85	90
50	7.19								
55	6.71	6.30							
60	6.07	5.74	5.28						
65	5.33	5.09	4.72	4.26					
70	4.69	4.51	4.21	3.83	3.47				
75	4.10	3.96	3.74	3.37	3.13	2.84			
80	3.52	3.42	3.25	3.22	2.78	2.54	2.30		
85	2.89	2.82	2.72	2.54	2.38	2.21	2.02	1.81	
90	2.08	2.06	2.01	1.92	1.83	1.74	1.63	1.51	1.39

Nadzieja matematyczna losu do loterji klasycznéj Królestwa Polskiego.

Według planu, bilans loterji klasycznéj Królestwa Polskiego na pięć klas podzielonéj, z 23.500 numerów składającéj się, i z których połowa, to jest 11.750 wygrywa, jest następujący:

B I L A N S.

Przychód.				*Roschód.*			
Do klasy	*losów*	*po rubli*	*=rubli*	*W klasie*			
1-éj	23.500	8	188.000	1-éj	1.200	wygranych r.	50.100
2-éj	22.300	9	200.700	2-éj	1.200	„ „	63.600
3-éj	21.100	9	189.900	3-éj	1.200	„ „	77.500
4-éj	19 900	9	179.100	4-éj	1.200	„ „	89.900
5-éj	18 700	10	187.000	5-éj	6.950	„ „	660.600
w ogóle rubli			944.700	Dla warsz. Tow. Dobrocz.		„	3.000
							944.700

Od każdéj wygranéj odtrąca się 12% na dochód skarbu.
„ „ „ 3% „ kolektora.
razem 15%

Nadto w każdéj klasie kolektor pobiera od każdego losu 24 kopiejki, tytułem wpisowego.

Z powyższego planu widzimy, że koszta losu są następujące:

do 1-éj klasy rubli $8,^{24}$
2-éj „ „ $9,^{24}$
3-éj „ „ $9,^{24}$
4-éj „ „ $9,^{24}$
5-éj „ „ $10,^{24}$
Razem „ $46,^{20} = 45 + (1,^{20})$

Przystąpmy teraz do obliczenia nadziei matematycznéj losu. W tym celu zredukujmy wszystkie wygrane do prawdziwéj ich wartości, to jest odtrąćmy od nich 15%, przez co otrzymamy:

	rubli		*15%*		
Wartość wygranych w klasie 1-éj	50.100	—	7.515	=	42.585
„ „ „ 2-éj	63.600	—	9.540	=	54.060
„ „ „ 3-éj	77.500	—	11.625	=	65.875
„ „ „ 4-éj	89.900	—	13.485	=	76.415
„ „ „ 5-éj	660.600	—	99.090	=	561.510
	941.700	—	141.255	=	800.445

Przypuśćmy teraz, że każdy los został opłacony za wszystkie 5 klas. Tę hipotezę przyjąwszy, widzimy że z wyjątkiem wielkości i ilości wygranych żadna klasa nie ma przewagi nad drugą, przez co nadzieja matematyczna losu w każdéj klasie wyrazi się wzorem

$$E = P.\ Q$$

gdzie P oznacza prawdopodobienstwo wygrania a Q wielkość wygranéj spodziewanéj; a że według przyjętéj hipotezy, każdy los ma udział we wszystkich pięciu klasach (wniósł bowiem opłatę za wszystkie 5 klas), to nadzieja jego jest sumą nadziei matematycznych we wszystkich pięciu klasach, które oznaczywszy kolejno:

w 1-éj przez $E_1 = P_1\ Q_1$
2-éj „ $E_2 = P_2\ Q_2$
3-éj „ $E_3 = P_3\ Q_3$
4-éj „ $E_4 = P_4\ Q_4$
5-éj „ $E_5 = P_5\ Q_5$

otrzymamy nadzieję matematyczną E we wszystkich pięciu klasach

$$E = P_1\ Q_1 + P_2\ Q_2 + P_3\ Q_3 + P_4\ Q_4 + P_5\ Q_5$$

Dla otrzymania liczebnéj wartości nadziei matematycznéj E, należy kolejno obliczyć wielkości P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5.

Prawdopodobieństwo wygrania w 1-éj klasie

$$P_1 = \frac{1.200}{23.500}$$

dla tego że na 23.500 przypadków możliwych, mamy 1.200 przypadków przyjaznych.

Prawdopodobieństwo wygrania w 2-éj klasie jest złożoném z prawdopodobieństwa niewygrania w klasie pierwszéj $1 - P_1 = \frac{22.300}{23.500}$ i z prawdopodobieństwa wygrania w drugiéj; tak że

$$P_2 = \frac{22\ 300}{23.500} \times \frac{1.200}{22.300} = \frac{1.200}{23.500}$$

Tak samo postępując znajdziemy

$$P_3 = \frac{1.200}{23.500}$$

$$P_4 = \frac{1.200}{23.500}$$

$$P_5 = \frac{6.950}{23.500}$$

Dla obliczenia różnych wartości Q we wszystkich pięciu klasach, musimy zauważyć, że w klasie 1-éj oprócz wygranéj r. 42.585 wraca się jeszcze za

każdy wygrany los stawki do 4-ch następnych klas w ilości r. 37,[28]. Tak że wielkość wygranéj w pierwszéj klasie wynośi

rubli $42.585 + 1.200 \times 37,^{28} = 87.321$.

Ponieważ w téj wygranéj mają udział 1.200 losów, to

$$Q_1 = \frac{87.321}{1.200}$$

więc

$$P_1\, Q_1 = \frac{87.321}{1.200} \cdot \frac{1.200}{23.500} = \frac{87.321}{23.500}$$

Tak samo znajdziemy

$$\begin{cases} Q_2 = \dfrac{88.124}{22.300} \\ P_2\, Q_2 = \dfrac{88.124}{23.500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_3 = \dfrac{89.251}{21.100} \\ P_3\, Q_3 = \dfrac{89.251}{23.500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_4 = \dfrac{88.703}{19.900} \\ P_4\, Q_4 = \dfrac{88.703}{23.500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_5 = \dfrac{561.510}{6.950} \\ P_5\, Q_5 = \dfrac{561.510}{23.500} \end{cases}$$

$$E = \frac{87321 + 88124 + 89251 + 88703 + 561510}{23500} = \frac{914909}{23500} = 38,^{93}$$

Wartość więc losu według nadziei matematycznéj wynosi

rubli 38,[93].

Nadzieja matematyczna losu kupionego do różnych klas.

Jeżeli gracz nie w pierwszéj klasie lecz dopiero w następnych udział bierze,—co według planu jest dozwoloném, to stawki nie zmieniają się, ale jego nadzieja matematyczna się zmniejsza. Dajmy że gracz bierze los do klasy *drugiéj*. Płaci on za cały los, to jest rubli 46,[20]. Ponieważ w drugiéj klasie jest losów 22 300, z których 1.200 wygrywa, to

$$P_2 = \frac{1.200}{22.300}$$

$$Q_2 = \frac{88.124}{1.200}$$

$$P_2\, Q_2 = \frac{88.124}{22.300}$$

Tak samo znajdziemy

$$P_3\ Q_3 = \frac{89.251}{22.300}$$

$$P_4\ Q_4 = \frac{88.703}{22.300}$$

$$P_5\ Q_5 = \frac{561.510}{22.300}$$

$$E = \frac{88.124 + 89.251 + 88.703 + 561.510}{22.300} = \frac{827.588}{22.300} = 37,^{11}$$

Nadzieja matematyczna gracza jest więc rubli $37,^{11}$.

Jeżeli los kupiony do klasy *trzeciéj*, to nadzieja matematyczna

$$E_3 = \frac{89.251 + 88.703 + 561.510}{21.100} = 35,^{04}$$

Jeżeli do klasy *czwartéj*, to nadzieja matematyczna wyrazi się:

$$E_4 = \frac{88.703 + 561.510}{19.900} = 32,^{67}$$

Jeżeli nakoniec los kupiony do klasy *piątéj*, to nadzieja matematyczna

$$E_5 = \frac{561.510}{18.700} = 30,^{02}$$

Wszystko razem zebrawszy otrzymamy następującą tablicę:

Klasa	Liczba losów	Nadzieja matematyczna	Cena losu	Różnica
	r	u	b	l i
1	23.500	$38,^{93}$		$7,^{27}$
2	22.300	$37,^{11}$		$9,^{09}$
3	21.100	$35,^{04}$	$46,^{20}$	$11,^{16}$
4	19.900	$32,^{67}$		$13,^{53}$
5	18.700	$30,^{02}$		$16,^{18}$

Karol Hertz.

K R O N I K A (*).

— Stan **Likwidacji włościańskiéj** w końcu marca roku 1867.

Czynności przygotowawcze komisij włościańskich.

Tabel likw. podanych do komisij włoś. (oprócz 426 zwróconych tabel dóbr duchownych)	17.761
Z nich sprawdzonych w komisjach	13.032
I te obejmują { na dymów	290.526
I te obejmują { morgów.	4.000.690
Tabel przedstawionych do Komitetu Urządzającego . . .	11.008

Czynności ostateczne Komisij Centralnéj i Likwidacijnéj.

Tabel zatwierdzonych przez Kom. Centralną	9.413
Z nich przyznano } włościanom { na dymów	201.273
Z nich przyznano } włościanom { morgów. . : . . .	2.657.760
Z nich przyznano / właścicielom wynagrodzenia . . *rubli*	34.022.562
Tabel sprawdzonych przez Komisję Likwidacijną. . . .	7.719
Z nich zarządzono wypłaty na sumę . . . . . *rubli*	27.425.568

Do dnia $^1/_{13}$ kwietnia ostatnia cyfra wzrosła do sumy 29.019995,[67] w skład któréj wchodzą:

	Listy likwidacijne					Dopłata gotowizną
	I. rzędu po 1000 r.	II. 500	III. 250	IV. 100	Razem	
Sztuk	10607	13750	21828	59502	105687	.
Na sumę rubli	10.607000	6.875000	5.457000	5.950200	28.889200	130795,67

Razem j. w. 29.019995,67

— Wolą Najwyższą, na wniosek ministra finansów z d. $^2/_{14}$ grudnia r. z. zapadłą, na zachodniéj granicy Królestwa, z dniem $^1/_{13}$ stycznia r. b. urzą-

(*) Dz. W.

dzone zostały **cztery okręgi celne**: a) *Wierzbołowski;* b) *Alexandrowski*; c) *Kaliski* i d) *Zawichostski*, z podziałem komór i przykomórków.

— Ukazem N. z d. $^{19}/_{31}$ grudnia r. z. **Zarząd Poczt** w Królestwie oddany został od $^{1}/_{13}$ stycznia pod zwierzchnictwo *ministerstwa poczt i telegrafów* Cesarstwa, z przemianowaniem na *Zachodni okręg pocztowy.*

— Ukazem N. z tejże daty $^{19}/_{31}$ grudnia r. z. z dniem $^{1}/_{13}$ stycznia r. b. wprowadzoną została **ustawa czasowa o kasach ministerstwa skarbu** w gubernjach Królestwa Polskiego, mocą któréj powstały stosowne urządzenia, a mianowicie:

a) Warszawski *wydział kas* ministerstwa skarbu;
b) kasa *główna warszawska;*
c) kasy *gubernjalne* (10)—po jednéj w każdém mieście gubernjalném;
d) „ *okręgowe* (36)—każda na jeden lub na kilka powiatów;
e) *oddziały płatnicze* (4) kas gubernjalnych – w Sandomierzu, Alexandrowie, Dąbrowie i Suchedniowie — przeznaczone do czynienia wydatków zarządów celnego i górniczego.

Kasy gubernjalne i okręgowe, niezależne od rządów gubernjalnych i urzędów powiatowych, są wszakże w ciągłych z nimi stosunkach: otrzymują od nich wiadomości o podatkach i opłatach, co do wysokości, zmian, exekucji, umorzenia; a nawzajem komunikują im wykazy osobną instrukcją przepisane.

Do atrybucij Wydziału należą głównie: a) formowanie etatów dla kasy głównéj warszawskiéj i kas gubernjalnych, oraz budżetu ogólnego z etatów władz; b) nadzór nad wpływem dochodów i spełnianiem wydatków skarbowych; c) dalszy obrót kredytów i funduszów; d) prowadzenie rachunków z Bankiem i innemi władzami; e) czynności dotyczące operacji likwidacijnéj; f)ześrodkowanie rachunkowości z całego Królestwa i układanie materjałów do sprawozdania skarbowego; g) prowadzenie buchhalterji kasy głównéj warszawskiéj; h) zawiadywanie sprzedażą stempla i t. d.

Kasy gubernjalne, głównie płatnicze, mają jednak nadzór nad wpływem dochodów. Kasy okręgowe są poborowe, spełniają jednak wydatki w powiatach, lecz nie samoistnie, ale na rachunek kas gubernjalnych. Oddziały płatnicze spełniają wydatki miejscowych zarządów, według prawideł dla kas gubernjalnych przepisanych.

Wypłata w kasach dokonywa się na zasadzie *asygnacij z talonami* (z wyjątkiem pensij emerytalnych, wsparć i t. p., oraz funduszów ubespieczeń i likwidacijnego). Asygnacja przesyła się wprost do kasy przez władzę dysponującą; talon zaś nazajutrz wydaje się interesentowi.

— **Kontrola.** Ukaz N. z d. 28 grud./9 stycz. $186^6/_7$ znosi od $^1/_{13}$ stycznia Najwyższą Izbę Obrachunkową, Komisję Umorzenia, Kontrolę stempla i wydziały kontroli Komisji Skarbu i Zarządu pocztowego; a rosciągając na Królestwo Polskie przepisy o kontroli obowiązujące w Cesarstwie, stanowi dla tegoż Królestwa trzy Izby kontrolne: w Warszawie, Lublinie i Łomży.

— Ukazem N. z d. 25 lutego/9 marca **wydział komunikacij** w Królestwie, oddany pod zarząd ministerstwa komunikacij, stanowi XI okręg. Tenże ukaz porucza nadzór rządowy prywatnych dróg żelaznych głównemu inspektorowi dróg żel. pryw. w Cesarstwie.

— Ukazem N. z d. $^{10}/_{22}$ marca zniesioną została **Rada Stanu Królestwa.** Prawodawcze jéj atrybucje przeszły do Kancelarji Cesarskiéj i Komitetu do spraw polskich; sprawy o szlachectwie i tytułach poruczone zostały departamentowi heroldji senatu, a rostrząsanie sprawozdań władz—Komitetowi urządzającemu.

— **Drugie losowanie listów likwidacijnych** odbyło się w dniach 1 i 2 marca w Banku Polskim. Suma umorzonych w tém losowaniu listów wynosi rubli **434.900.**

*

REDAKTOR, Antoni Nagórny.

W drukarni Gazety Polskiéj. Za pozwoleniem Cenzury Rządowéj.